ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

# La matematica

# *e la sua didattica*

Anno 25, n. 2, 2017

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2017

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

# La matematica

## e la sua didattica

Anno 25, n. 2, 2017

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2017

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: prof.ssa Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

# La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

# Indice

# El talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: Un eje para el logro de la equidad educativa

**Erika Canché Góngora**
*Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE), México*
**Rosa Maria Farfán Márquez**
*Cinvestav-Instituto Politécnico Nacional (IPN), México*

**Abstract.** *The article attempts to establish a critical and fundamental discussion of a problem that has remained invisible in the Mexican educational system but which in contemporary studies is conceived as fundamental for equity in education and for the elaboration of public policies of education in order to attend diversity. The theoretical axes that guide this analysis, of socioepistemological approach, are related to a conceptualization of the talent in mathematics from a multidimensional and developable character, that is, as a social dimension of the intelligence focused towards a social construction of mathematical knowledge.*

*Keywords:* mathematical talent, socioepistemology, equity.

**Sunto.** *L'articolo propone una discussione critica e consapevole su un problema che è rimasto invisibile nel sistema educativo messicano ma che in studi recenti è considerato fondamentale per il raggiungimento dell'equità nel campo dell'istruzione ed essenziale per la formazione di politiche pubbliche in tema di istruzione che includano l'attenzione alla diversità. Gli assi teorici che guidano questa analisi, di taglio socioepistemologico, sono legati alla concettualizzazione del talento in matematica come multidimensionale e sviluppabile, ovvero come una dimensione sociale dell'intelligenza focalizzata su una costruzione sociale della conoscenza matematica.*

*Parole chiave:* talento in matematica, socioepistemologia, equità.

**Resumen.** *El artículo intenta establecer una discusión crítica y fundamentada de una problemática que ha permanecido invisible en el sistema educativo mexicano pero que en estudios contemporáneos se le concibe como fundamental para el logro de la equidad en la educación, e indispensable para la conformación de políticas públicas de educación que comprendan la atención a la diversidad. Los ejes teóricos que guían este análisis, de corte socioepistemológico, se relacionan con una alternativa en cuanto a la conceptualización del talento en matemáticas desde un carácter multidimensional y desarrollable, esto es, como una dimensión social de la inteligencia enfocada hacia una construcción social del conocimiento matemático.*

*Palabras clave:* talento en matemáticas, socioepistemología, equidad.

## 1. Nivel conceptual: El talento como dimensión social de la inteligencia

Las necesidades educativas de la sociedad contemporánea mantienen la mira sobre la importancia de que potenciar las capacidades es indiscutible. En la actualidad, el éxito de la educación y sus procesos es garantizar que todos los involucrados desarrollen su potencial, que sean constructoras y constructores de metas y que usen y desarrollen conocimientos requeridos para alcanzar la excelencia esperada. Sin embargo, si analizamos a profundidad este planteamiento podríamos cuestionarnos si efectivamente todos los individuos tienen las mismas necesidades y por tanto demandan del mismo tipo de recursos para alcanzar su máximo potencial. Postular que todos aprendemos por igual y de la misma forma, no es del todo cierto.

El término *talento* emerge conceptualmente de la teoría factorial de inteligencia, que distingue a la inteligencia y a sus componentes, uno general y otros específicos. Esta teoría desarrollada por el psicólogo inglés Charles Spearman en 1904 propone una proyección de las capacidades genéticas hacia aptitudes, competencias y comportamientos como respuesta a retos ambientales en áreas tan diversas como las visuales manipulativas, académicas o psicomotoras. Podría decirse entonces que el término *talento* hace referencia a una aptitud específica como lo escolar, por ejemplo, y se aleja de una versión más abstracta y universal de lo que es la inteligencia (Lorenzo & Martínez, 2003).

En este documento, centraremos la discusión en el talento académico caracterizado por las diferentes estrategias de aprendizaje, instrumentos cognitivos y comportamientos sociales todos ellos resultado de la acción ante una situación problemática dentro de un contexto escolar. Sin embargo, apoyándonos en la crítica realizada por Mönks y Mason (2000), subrayamos la existencia de problemáticas conceptuales relativas tanto al tratamiento como a la identificación de las capacidades superiores desde dos aristas: una teórica y otra práctica.

La teórica sintetiza que, a pesar de que se reconoce al término como diferente de otros, aún manifiesta una minimización de todos los factores de corte social influyentes, que permitirían un tratamiento flexible e integral del término. Esta situación también se observa a nivel escolar (arista práctica) donde *talento* es un adjetivo con una fuerte carga hacia la inteligencia cognitiva y cercana al formalismo de un currículo secuenciado pero carente de significación.

A partir de esta situación, es natural trasladar la problemática a los sistemas educativos, donde "giftedness [superdotación] es algo que otorgamos, no algo que descubrimos" (Borland, 2005, p. 8). Escolarmente, las habilidades o capacidades por encima de promedio categorizan a los estudiantes y los envuelven dentro de un contexto de éxito individual; esto es, buenas notas, excelencia académica. Ello se debe en gran medida a que mucho de lo que se ha difundido sobre inteligencia perdura hasta nuestros días, sobreviviendo de la misma forma en el sistema educativo.

A continuación, presentaremos una discusión sobre el tema organizada en cuatro niveles: conceptual, político-ideológico, pedagógico y político; lo anterior para abordar una crítica sobre el tratamiento escolar del talento académico en matemáticas en la actualidad dentro del contexto mexicano. Es de nuestro interés argumentar hasta qué punto el modelo educativo de este país, promueve actualmente la inequidad educativa al aceptar y preservar en el funcionamiento escolar una visión monolítica de la inteligencia en la cual el conocimiento matemático es estático y formal en el sentido más utilitario de ambos términos.

### *1.1. El talento como una manifestación de la inteligencia*

Los inicios de la valoración cuantitativa de la inteligencia se determinan a partir de los estudios realizados por Francis Galton (1822–1911) con la fundación de un laboratorio antropométrico. Esta fundación fue creada para el estudio de la herencia de las aptitudes físicas y mentales mediante los llamados test sensoriales y motores, con el uso de métodos para la medida de rasgos psicológicos como parte de proyectos que involucraban a la Biología, la Psicología y a las Matemáticas. Estas fueron las primeras pruebas sobre herencia de la capacidad mental que se realizaron con ayuda de métodos estadísticos.

Si bien los inicios del concepto de inteligencia se centran en cuestiones fisiológicas o hereditarias, las definiciones han evolucionado hacia aspectos conductuales como la manifestación de habilidades y capacidades demostradas en la resolución de problemas o cuestionamientos que involucran altos niveles de abstracción. Recientemente, ciertos estudios (Canché, 2013; Canché, Farfán, & Simón, 2011; Simón, 2015) se han encaminado a considerar la importancia del contexto sociocultural en donde el individuo y sus relaciones con el medio y ante adaptaciones a nuevas situaciones, también pueden manifestar condiciones de inteligencia.

En materia educativa las diferentes corrientes pedagógicas también refieren formas de concebir la educación y su tratamiento, así como el valor escolar de aquél estudiante “inteligente”. En este ámbito en particular, el debate principal gira en torno a la frontera o límite entre lo que el individuo posee de forma innata y lo que el medio ambiente le puede inferir y en lo cual se destacará dependiendo del área; es decir, ¿es la inteligencia o son las inteligencias?, por tanto, ¿es innata o se puede aprender?

Por otra parte, los estudios sobre el talento académico representan un reto para las investigaciones actuales. A partir de trabajos como los de Feldhusen (1995, 1996) y Piirto (1995), el término *talento* comienza a ganar terreno por encima de los múltiples estudios sobre la inteligencia superdotada. En la actualidad existe una demanda de investigación científica sobre las altas capacidades que en general se dirigen hacia dos vertientes, principalmente: la identificación de las capacidades superiores y el tratamiento educativo de las mismas considerando la importancia de realizar estudios de este corte por su incidencia en niveles sociales y educativos.

En el ámbito social, el talento será valorado como esencial en aquel ciudadano potencialmente líder y solucionador de problemas de su área de experiencia (Winner, 2000). En el ámbito educativo, por su parte, la demanda de información al respecto es fundamental, porque es la sociedad misma quien exige a la escuela la identificación y atención al alumno con talento:

> (...) para fomentar el desarrollo de los talentos académicos, es necesario crear un sistema de identificación que permita reconocer a los niños y jóvenes con talento, para lo cual se deben diseñar estrategias de identificación a nivel familiar y escolar (Bralic & Romagnoli, 2000). (Raglianti, 2009, p. 16)

Siguiendo las pautas de esta discusión, los profesores en servicio y en formación demandan también información al respecto, dado que manifiestan un desconocimiento de las características de estos niños y de cómo prestarles la atención educativa que necesitan (Del Caño, 2001). Los programas de atención, por su parte, constituyen una acción anexa o paralela a la educación regular, de acuerdo con la región donde se haya conformado el plan de atención.

La aproximación al desarrollo conceptual del término *talento* también permite entender las transformaciones que ha sufrido el proceso de identificación, evidente desde la perspectiva multidimensional donde se hace indiscutible la identificación diferencial entre la inteligencia superdotada y el talento.

William Stern fue el primero en considerar que la inteligencia es una condición necesaria pero no suficiente para el desempeño sobresaliente y manifestó la importancia de otros rasgos de la personalidad como la motivación, observado en el compromiso con la realización de una tarea (Lorenzo, 2006).

Existen actualmente los modelos socioculturales con relación a la inteligencia humana. Estos enfoques resaltan el impacto que tienen los factores familiares, escolares y culturales en la conceptualización del talento, tanto en la potencialización como en el impedimento del desarrollo del talentoso, según el caso. No obstante, las definiciones actuales parecen no dejar de ajustarse al modelo cognitivo que alude a procesos de pensamiento complejos y necesarios para la resolución de problemas. Los cambios más evidentes se perciben en los modelos donde se relaciona lo innato con el medio ambiente. Aquí, el talento se estudia en interacciones con los procesos y ámbitos en los que se desarrolla; es decir se considera la influencia de los factores sociales. El rol de estos factores, se discute en los modelos sistémicos dado que presentan la noción de talento en constante construcción social, puesto que la sociedad determina quién es reconocido como talentoso en consideración de factores intelectuales y no intelectuales (como el factor suerte).

Desde una visión multidimensional, la inteligencia se estudia y mide a partir del rendimiento de logros, capacidades, adaptaciones al medio y rasgos de personalidad. Entonces, lo académico ya no tiene una posición fundamental, sino es visto como un aspecto concreto: el talento académico. El talento, entonces, se aleja del desarrollo intelectual y estará ligado con la adquisición y desarrollo de habilidades en áreas específicas.

La tendencia en la investigación actual supera el uso al valor determinado en el test psicométrico, al considerar factores de construcción tanto de la inteligencia superdotada como del talento, donde los factores sociales juegan un rol fundamental. Para Mönks y Mason (2000) predominan las posturas intermedias, que estudian el desarrollo humano de las capacidades superiores poniendo en interacción el rol de la naturaleza (nature) y la crianza (nurture) con el siguiente cuestionamiento central: ¿Qué resulta de la interacción de atributos genéticos individuales específicos y la experiencia dada en un ambiente cultural? Estas dos posturas fueron antagónicas en el pasado, pero en la actualidad ambas constituyen ejes fundamentales para el desarrollo o distinción de diversas teorías sobre el tema.

Este análisis nos permite perfilar una urgencia de generar visiones y tratamientos alternativos que desafíen estas creencias y afecten al fenómeno de catalogar a los estudiantes como inteligentes o no inteligentes y que la atención educativa sea equitativa para todos.

Desde esta crítica y en concordancia con las tendencias actuales de los estudios sobre *gifted education* (Pfeiffer, 2011), tomamos el desafío de un cambio de paradigma al alejarnos del énfasis sobre las definiciones categóricas de superdotado y adoptar una perspectiva del desarrollo del talento. Este cambio no solamente enfrenta la tarea de cambiar una visión simplista de la inteligencia (basada en el cociente intelectual, CI) sino romper con la tradición de términos socialmente construidos y aceptados.

Ante esto, asumimos como posible la alternativa de estudiar la inteligencia desde una visión más amplia. Proponemos, en una visión del talento matemático que conjunte elementos de carácter contextual/ambiental en términos de trabajar desde las competencias de cada uno y desde el nivel que se tenga para potenciarlos. Éste es el reto de nuestra investigación: generar un modelo teórico que plantee de base una conceptualización del talento desde la construcción social del conocimiento. Consideramos que el talento en los individuos va más allá del diagnóstico de una capacidad intelectual general; y que se manifiesta en diferentes dominios social y culturalmente valorados, mediante actitudes, estrategias, afecciones de la relación emergente hacia el conocimiento en forma de argumentos o significados, esto es, de forma multidimensional. Nuestra propuesta para abordar el problema está basada en el campo de la matemática educativa y desde la perspectiva teórica sobre la construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013; Cantoral & Farfán, 2003; Farfán, 2012; Suárez & Cordero, 2010).

Hablar de matemáticas, talento y sociedad supone múltiples cuestionamientos, concepciones ideológicas y líneas de investigación; sin embargo, nuestra intención es ahondar en el aspecto que responde a lo social y político desde el punto de vista de una serie de acciones intencionales encauzadas por las reflexiones teóricas y científicas que desarrollamos anteriormente sobre matemáticas y talento. Intentamos erigir un diálogo que intersecte nuestros hallazgos de la investigación con el problema central que nos mueve: la equidad en matemática educativa y situando la problemática en un grupo de niñas y niños que son exitosos en matemáticas, pero, acorde a nuestra hipótesis de trabajo, no están siendo atendidos por el sistema educativo mexicano en lo referente a la potencialización de sus capacidades.

Creemos que son problemáticas contemporáneas esenciales y que complementan estudios sobre diferencias de género, modificaciones curriculares, desarrollo profesional docente, todas ellas respecto al estado actual de la enseñanza de las matemáticas en el mundo. Como soporte de nuestra crítica se encuentran investigaciones recientes sobre las diferencias de género con respecto al talento en matemáticas (Farfán, Simón, & García, 2016; Simón, 2015), en donde se detallan aspectos socioculturales propios del género en el desarrollo del talento matemático en ambientes escolares, donde interactúan padres de familia, profesores y el curriculum en cuestión.

### *1.2. La construcción social del conocimiento matemático eje de mediación sobre intelecto y aprendizaje en matemáticas*

El conocimiento o los conocimientos matemáticos escolares están organizados curricularmente para ser intransferibles por nivel, es decir, lo que se aprende en cierto nivel es base para el siguiente y así consecutivamente. Esto supone una versión del conocimiento donde éste puede tratarse como un objeto tangible obtenido por instrucciones efectivas o medios que la favorezcan. En esta realidad, se adecúa a la perfección el talento como rasgo individual y visiblemente dependiente de percentiles resultado de pruebas estandarizadas, las cuales tienen la misma visión sobre las matemáticas: una competencia de rapidez, de formalidad y de genialidad.

Desde nuestra perspectiva teórica, la socioepistemología, *conocer* involucra un proceso de apropiación de significados examinados a través de sus usos y, dependientes del contexto de actuación. Es decir, se trata de poner en funcionamiento saberes relativos a conocimientos que son útiles frente a una situación problemática (Cantoral, 2013). Esta teoría nace disciplinarmente en la matemática educativa y adopta como objeto de estudio a la construcción social de conocimiento; fijando una postura epistemológica en relación a los objetos matemáticos (su construcción) y una epistemología del aprendizaje en su versión sociocultural y dependiente de las prácticas sociales (principio normativo de las prácticas sociales).

Los usos del conocimiento son resultado de la experiencia cotidiana, escolar o extraescolar, de ciertos saberes puestos en juego que no permanecen estáticos, sino que se desarrollan en diferentes contextos. Lo anterior le da un estatus diferente a los procesos mentales o intelectuales como procesos sociales; aprender es un proceso social, no mental. Desde la socioepistemología este proceso de significación dinámico, funcional, relativista y conceptual se conoce como *resignificación progresiva* (Suárez & Cordero, 2010).

Estos saberes no son individuales ni independientes de un proceso continuo de reorganizaciones, sino que la relación al saber está en términos de sus significados construidos a partir de sus usos y en vías de construir argumentos funcionales en determinadas problemáticas. El significado (asociado a un saber matemático) es relativo, dinámico, contextual y funcional. La relación al saber emerge de usos y significados relativos al contexto, donde esta relación es progresiva dependiendo de la intencionalidad contextual donde se manifiesta una apropiación, una resignificación de los usos asociados al saber y entonces un aprendizaje. (Ver, por ejemplo: Cantoral & Montiel, 2014; Cordero & Solís, 2001; Farfán, 2013). Consideramos específicamente que bajo esta visión más plural es que nuestra concepción de talento matemático toma mucho mayor sentido y robustece nuestra discusión.

### *1.3. Pensamiento matemático, funcional y transversal*

Las sociedades actuales buscan individuos capaces y competitivos. La pedagogía asume esta responsabilidad con el actual desarrollo de competencias. El talento, en particular el académico y social, resulta importante en sociedades como las de hoy que valoran ampliamente la alta capacidad de una persona para resolver problemas o enfrentar retos de la vida cotidiana.

En cuestión del talento y de su desarrollo, se valoran las capacidades creativas y de innovación al ser reconocidas como indicadores del éxito individual (por ejemplo, en temas como la gestión del talento humano: Chiavenato, 2002) y que evidencien repercusiones sociales; esto, en beneficio sobre empresas, instituciones, en incluso sobre el crecimiento económico de un país. Esta valoración, que desde luego es general, también se da en la escuela.

La escuela nace como una institución reguladora de costumbres y normativas cuya función social es proveer conocimientos y herramientas para el desarrollo integral de un ser humano. Es un ambiente consolidado y constituido por estímulos y refuerzos organizados para ser transmitidos generacionalmente; en este sentido el perfil intelectual académico se traduce en responder favorablemente a ciertos estímulos encaminados a demostrar capacidades, habilidades o competencias. Sin embargo, tanto pedagogos como psicólogos han intentado abordar una problemática teórica-ideológica que tiene que ver con la naturaleza de la inteligencia, la cual puede analizarse desde los siguientes aspectos (Perleth & Heller, 2009):

- Contribuciones excepcionales para la sociedad realizadas por individuos con talentos excepcionales (*giftedness research*).
- Contribuciones excepcionales desarrolladas por individuos con una amplia gama de habilidad (*expertise research*).

Esta dualidad refleja no sólo una alta valoración social, por las altas capacidades del individuo, sino la necesidad de entender dónde se produce y cómo se regulan dichas capacidades para lograr la excepcionalidad. Donde se aceptan dos fuentes: 1) una predisposición biológica o bien, 2) un producto resultante de la actividad humana. Nuestra perspectiva socioepistemológica no acepta ni niega cualquiera de las dos. Pensamos que el aprendizaje parte de una apropiación y una resignificación, pero dentro de un constante proceso de compartir. La inteligencia no solamente está contenida en la mente humana, el talento se manifiesta mediante un proceso que involucra al saber, al individuo y sus sentidos y capacidades humanas, pero también al grupo cultural a través de las instituciones a las que pertenece. Bajo esta posición el ambiente y los escenarios que rodean al individuo se expresan en el individuo y en su grupo de un modo emergente al presentarle estímulos de actuación.

La dimensión social en nuestro trabajo tiene una relevancia fundamental, no solamente porque postula al término *talento* como un constructo social sino porque crítica a la permeada visión de centrar en el individuo sus capacidades o el reconocimiento o potencialización de las mismas olvidándose del sentido de colectivo o comunidad.

Si consideráramos a la inteligencia de un modo individual, seguiríamos manteniendo la hegemonía de la unicidad mental y eliminaríamos el rol fundamental que tienen tanto los estímulos como los factores sociales. Pero no es solamente la influencia social lo que queremos resaltar en el modelo teórico que poco a poco vamos discutiendo, sino el cambio conceptual que proponemos a la noción de talento para el contexto matemático. Esto involucra una posición sobre el conocimiento matemático visto en diferentes escenarios y contextos mediante prácticas asociadas a él; concretamente, nos referimos al sentido y significado de los conceptos matemáticos, a las definiciones o a las operaciones, puestos en juego en situaciones de aprendizaje donde se obtengan nuevos conceptos o se construya uno. Nos referimos a su *racionalidad contextualizada* (Cantoral, 2013).

Un ejemplo de esta corriente son los trabajos de Briceño (2013), Buendía (2004) o Suárez y Cordero (2010), quienes postulan que *el uso de las gráficas genera conocimiento matemático*. Lo anterior se refiere a que la funcionalidad de este conocimiento matemático genera argumentaciones del objeto matemático lo cual le da significados a conceptos en situaciones específicas.

En esta investigación nos basaremos en un estudio bajo esta misma línea en la cual niñas y niños de nivel básico que usan sensores y calculadoras gráficas modelan situaciones de movimiento y reproducir determinadas “montañas” por medio de su propio “movimiento” (Figura 1).

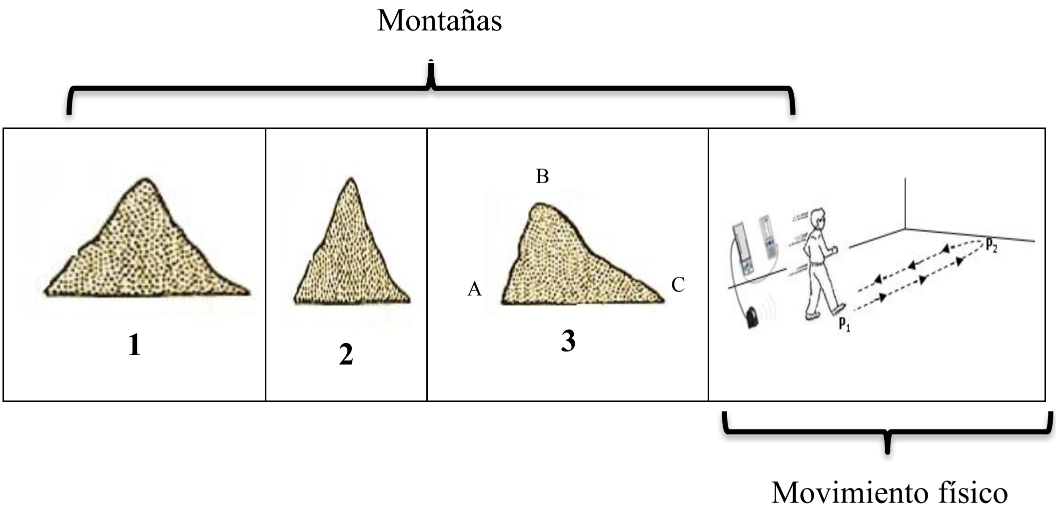



*Figura 1*. Desarrollo de usos de la gráfica (Briceño, 2013).

Con ésta idea de por medio, los niños empiezan a construir ideas sobre la variación que tiene la curvatura de la gráfica, a partir de sus movimientos. Por ejemplo, para reproducir una gráfica semejante a la montaña 1 lo describen como *movimiento lento* y para la montaña 2 como *movimiento rápido*. Esta idea de usar la gráfica para describir el movimiento, se va desarrollando en la tercera montaña, donde describen que el movimiento de ida (movimiento de A *a* B) es rápido y que en el movimiento de regreso (el trayecto de B a C) es lento. El *funcionamiento* de la gráfica consiste en que el niño va concibiendo a la curvatura con una cualidad que le ayuda a explicar la variación del movimiento, es decir, va ganando un propósito de ser usado como un modelo que identifica el cambio de movimiento. En tanto la *forma,* consiste en la manera que se desempeñó ese *funcionamiento,* esto es, los niños fueron estableciendo patrones de movimiento característicos (rápido o lento) con la gráfica. Esta actividad nos lleva a reflexionar sobre la cantidad de argumentos sobre la variación (Briceño, 2013); pero también sobre la habilidad para reconocer, visualizar, representar y reproducir formas geométricas mediante modelos gráficos.

De esta forma se muestra el desarrollo de significados en escenarios de construcción (escolares y no escolares) donde hay cierta intencionalidad y un uso compartido del conocimiento el cual es propio del contexto y de las prácticas asociadas, es el ideal para desarrollar marcos de conceptualización multidimensional del talento en matemáticas. Donde la relevancia el eje de desarrollo no sea solamente del grupo cultural o social sobre el cual se analiza ni únicamente sobre la base de la interacción social, sino que el análisis se basa en la organización individual y colectiva de conocimientos para resolver problemas comunes.

## 2. Nivel político-ideológico: El talento en matemáticas tiene un carácter susceptible de desarrollarse

Para un país como México la diversidad es un rasgo que nos brinda identidad nacional. La atención educativa brindada a la población en educación básica reproduce un modelo homogéneo que soslaya aspectos de naturaleza cultural que la alejan de ser incluyente y de calidad. Se han impuesto límites y estándares curriculares que tienden a generalizar una versión de logro académico relativa a la adquisición de conocimientos secuenciados y curricularmente estables.

Cuando se habla de diversidad en la educación inevitablemente se tiende a pensar en primera instancia en las características biológicas o étnicas que nos distinguen individualmente, sin embargo, la diversidad también se manifiesta en los distintos ritmos de aprendizaje, intereses académico-profesionales, expectativas, manifestaciones conductuales, etc.

En las últimas décadas y, en particular al comenzar el siglo XXI, el tema de la atención educativa emerge con la intención de lograr que los actores del sistema reciban una educación de *calidad,* cuyo rasgo esencial sea la *equidad* en la oferta educativa (SEP, 2002). En términos de justicia educativa es fundamental que todos, alumnas y alumnos, independientemente de su origen étnico, ambiente familiar de procedencia o características individuales, participen en experiencias educativas que propicien el desarrollo máximo posible de sus potencialidades; es decir, que dispongan de iguales oportunidades – tomando en cuenta sus puntos de partida, sus características personales y sociales – para alcanzar las metas fundamentales de la educación básica.

El reconocimiento de la importancia de atender a esta diversidad está situado si bien en estos principios (equidad y calidad), también lo está al reflexionar sobre el rol de la escuela como aquél espacio social donde se prepara a los ciudadanos en transformadores de la sociedad, donde la educación basada en el respeto y la valoración de las diferencias, es fundamental.

> El gran avance logrado en la cobertura universal en educación básica no se ha acompañado de respuestas efectivas de los sistemas educativos a las diferencias sociales, económicas, geográficas, lingüísticas, culturales e individuales, lo que ha conducido a un alto nivel de analfabetismo funcional, de repetición y de ausentismo escolar. (Blanco, 1999, pp. 55–56)

Lograr una escuela regida bajo estos principios es realmente complejo. Pensar en un aula cotidiana con base en estos ideales requeriría, en nuestra opinión, no solo la reconstrucción de las interacciones entre individuo, profesor y saber, sino que también sería necesario cambiar la visión homogénea de la escuela como rectora de sociedades.

En vías de democratizar los procesos educativos, las políticas de equidad educativa se perfilan como tendencias actuales del cambio educativo que centran su atención en analizar el rendimiento y aprovechamiento escolar de acuerdo con cada región (caracterizada por un determinado tipo de nivel socioeconómico y cultural) con la intención de confrontar la realidad extra escolar que viven las familias con la realidad al interior del aula. Sin embargo, a nuestro juicio, los verdaderos retos están en integrar en el aula la competencia lograda por los educandos con los factores institucionales sumados a los conocimientos y métodos de gestión del aprendizaje.

Lo que educativamente se ha realizado es identificar el perfil intelectual de un individuo contrastando su edad con su reacción cognitiva asociada a conocimientos o razonamientos lógicos que, a su vez, determinarán su recorrido académico y sus oportunidades de educación superior. Son competencias *individuales* que categorizan las capacidades relativas logros y desempeños, pero que carecen de elementos asociados a la cultura puesto que se centran únicamente en evidencias cognitivas, biológicas e incluso genéticas.

En el mismo sentido, las matemáticas escolares se "mitifican" (Lim, 1999) y se consideran como una materia difícil, sólo para los inteligentes y comúnmente son consideradas como un dominio masculino (Simón, 2015). Estas percepciones culturales generan imágenes públicas de los matemáticos como personas "arrogantes, elitistas, excéntricos e inadaptados sociales (…) carentes de sentido común y del humor" (Howson & Kahane, 1990, p. 3).

En el espacio escolar se han impuesto límites curriculares determinados por convenios de comportamiento con el saber, con los pares, con el profesor y con la institución. Quienes resultan exitosos en dicha relación con los contenidos matemáticos escolares parecieran tener las condiciones para la conformación de una *élite académica*, resultante de la selección académica basada en las notas de los exámenes que a su vez derivan en privilegios y ventajas al interior de la comunidad escolar. Se consolidan también estrategias, relaciones y otras características cuyos efectos al interior generan fenómenos didácticos relevantes para su estudio, dado que las políticas equitativas aún parecen olvidar que la atención a la diversidad escolar no solamente se refiere a cobertura y alfabetización, sino también a atender a la diversidad de la población incluyendo a la que se encuentra "por encima de promedio".

En trabajos como los de Zorrilla (2003) y Blanco (2009a, 2009b), que hablan sobre la eficacia de los procesos escolares, contrastan lo ambiental con lo individual en cuanto al funcionamiento escolar y revelan la fuerte influencia de múltiples variables de tipo social como son la familia y la comunidad mexicanas (variables socioculturales), creándose así diferentes modelos para el mejoramiento de la escuela basados en la evaluación teniendo como ejes a factores como el liderazgo, la planificación y los recursos.

Sin embargo, aún falta investigar y proponer ejes de educación equitativa e igualitaria que permitan, además de visibilizar un fenómeno, proponer una transformación social a través de la conformación de una estrategia de políticas públicas basadas en investigación científica bajo la hipótesis pertinente de que la inequidad escolar es producto de una visión monolítica de la inteligencia y que está basada en la valoración cuantitativa de las capacidades humanas.

El ser humano si bien posee una constitución biológica adaptable a estímulos, los percibe y reacciona ante ellos; usa aquellas herramientas necesarias para actuar y transformar en situaciones de aprendizaje. Esta es la forma en la que concebimos el proceso de aprender. Lo fundamental está en considerar que los individuos no contamos genéticamente con estructuras de actuación, más bien nuestras acciones están relacionadas con el medio, la cultura y con lo que esencialmente representa un problema para él (relativismo epistemológico) (Cantoral, 2013).

De acuerdo con Cantoral (2013) "los procesos mentales están relacionados con los escenarios culturales, históricos e institucionales" (p. 75). Esto es, existe una dualidad entre la acción humana y su ambiente; y en la experiencia generada con cada una de esas acciones. El aspecto esencial a resaltar es el dinamismo involucrado en las acciones individuales y colectivas; las cuales contrastan con la perspectiva biológica que rige determinadas conductas mentales, pero en el caso de las relacionadas con un individuo frente al conocimiento y activo sobre él, hay un inevitable carácter dinámico, flexible, situado y relativo a la comunidad.

El conocimiento no existe ajeno al humano, su relación con este conocimiento es un proceso dinámico y continuo pero dependiente de él o los escenarios de construcción. De ahí que se conciba como saber puesto que la relación estriba de acciones sobre y con él; el conocimiento en uso, entonces es un saber: no todos los individuos son iguales y por tanto no aprenden por igual ni de la misma forma, pero todos somos capaces de aprender y de desarrollar talentos en matemáticas.

A modo de concluir este apartado recurrimos a análisis de dos polos sobre los que hemos discutido ampliamente: la construcción individual y la construcción social, e intentamos generar un equilibrio argumentativo entre ambos. Por ejemplo, Zaldívar (2009, 2012) y Zaldívar et al. (2014) construye un ejemplo de desarrollo de usos de la gráfica en una situación de movimiento en un escenario no escolar y que denomina como cotidiano. Los argumentos están basados en el movimiento de un resorte cuando se le coloca una pesa en uno de sus extremos. La hipótesis de construcción de conocimiento matemático es que los ciudadanos responden en términos de velocidad, tiempo y forma (del resorte) (Figura 2) lo cual se desarrolla conforme van manipulando el sistema y se les realizan variaciones de tiempo y peso (Figura 3).

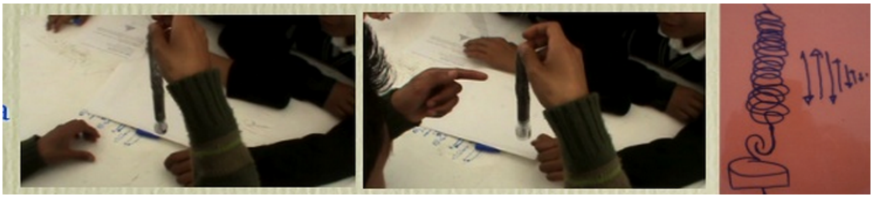


*Figura 2*. Movimiento del resorte (Zaldívar, 2012).

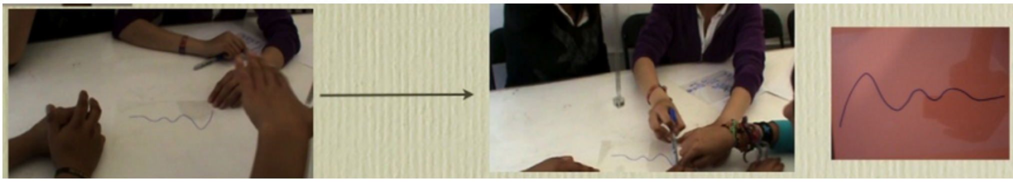


*Figura 3*. Desarrollo de usos de movimiento del resorte (Zaldívar, 2012).

Lo central de la discusión es que desde un punto de vista individual el desempeño en la tarea se completaría con el rendimiento del estudiante en ella. Bastaría con repetir problemas en el mismo sentido y vigilar su nivel de comprensión y cumplimiento. Por otra parte, desde el estudio de la habilidad para visualizar y establecer un modelo, aún a nivel de conjetura, se precisa de una serie de rasgos conductuales y conceptuales propios del individuo, pero compartidos con el colectivo para resolver un problema cotidiano sobre, en este caso, la forma de un resorte, su estiramiento y la variación entre magnitudes.

En términos teóricos, de acuerdo con la socioepistemología, cuando se problematiza lo epistemológico de un concepto matemático, los conocimientos se construyen, se organizan y reorganizan las herramientas matemáticas para hacerlos funcionales. Luego entonces, desde una realidad social, el individuo se relaciona al saber (conocimiento en uso) de múltiples formas (usos y significados) válidos desde y para un contexto de significación (relativismo epistemológico).

## 3. Nivel pedagógico: Un perfil de pensamiento matemático como orientador por encima de la aplicación de un test de conocimientos

La escuela y su función social la hacen inevitablemente un espacio normado de valores, ideales políticos, argumentos y circunstancias enmarcadas dentro de un contexto histórico, geográfico y social determinado. De esta forma puede suponerse que las visiones ideológicas que subyacen a cada escuela serán variables y situadas, lo que no sucede específicamente con el conocimiento matemático. Las acciones y reflexiones alrededor del currículo de matemáticas y sus contenidos en educación básica son incesantes; tendencias como las matemáticas modernas con versiones abstractas y formales de las nociones matemáticas reflejan sin duda pruebas para cambiar los rumbos de su educación, aun cuando sus fracasos hayan sido evidentes.

Este tipo de acciones, irremediablemente transforman a las matemáticas escolares en un elemento con un fuerte carácter selectivo. Existe una creencia por demás arraigada de que las matemáticas son difíciles y no todos son capaces de aprenderlas. "[Las matemáticas] eran por encima de todas, la materia que separaba a los académicamente brillantes de los que no lo eran" (Howson & Wilson, 1987, p. 24).

Sin embargo, son un conocimiento curricularmente ineludible; es decir, nadie duda de la necesidad social de su estudio. Este dilema escolar se percibe en diferentes niveles dentro del mismo sistema educativo, pero la aceptación de su estudio es generalizada. En la actualidad, siguiendo una tendencia que viene desde las últimas dos décadas del siglo pasado, las razones de su estudio están dominadas por factores socioeconómicos y tecnológicos. No se pone en duda la contribución que, en el pasado, y seguramente en el futuro, tendrían las matemáticas para el desarrollo de las sociedades, pero lo que sí resulta cuestionable es la frase: "No todos pueden aprender matemáticas". Lo cierto es que la necesidad de personas con un conocimiento especializado en matemáticas va a depender de los fines profesionales, pero tampoco podemos basarnos en esta necesidad para determinar la dosificación de los contenidos o de los demás contenidos curriculares. Desde un punto de vista sociocultural y antropológico las matemáticas son contextuales en sí mismas en tanto que determinan sistemas de creencias:

> Que un pueblo cuente de a cinco unidades, o por decenas, docenas o veintenas; que tenga o no números cardinales que pasen de cinco, o que posea los conceptos matemáticos más modernos y altamente desarrollados, su conducta matemática es determinada por la cultura que posee. (White, 1988, pp. 345–346)

### *3.1. ¿Currículo "talentoso"?*

En términos de equidad un tratamiento de las matemáticas representaría, en nuestra opinión, un proceso en el cual se brinden oportunidades de aprendizaje dinámico y valorado por las argumentaciones, significados y el uso de los mismos al interior de problemáticas que impliquen modelos significativos y reflexivos, por encima de técnicas y aplicación de fórmulas generalizadas de cursos previos. De esta forma importarían los argumentos creativos, el pensamiento lógico y estarían validados por el problema mismo o por el razonamiento matemático del colectivo y no por un libro de texto. Las prácticas escolares, en términos de rutinas y objetivos serían diferentes y encaminadas a *hacer matemáticas* y no estudiar matemáticas. Estas nuevas concepciones del conocimiento matemático proporcionan elementos de acción que intentamos recuperar en términos de la problemática de investigación que gira en torno a la excelencia en matemáticas, ¿qué papel tienen las matemáticas en este problema?

Pensar en la diversidad no supone subrayar las características particulares que hacen diferentes a los individuos, supone, más bien, no excluir (discriminar) a nadie; significa, más bien, hacer una escuela para todos, una escuela incluyente – o lo que algunos autores, como Lorenzo y Ruedas (1995) llaman el pluralismo compartido – que permita a la totalidad de los usuarios el adquirir un patrimonio cultural que sostenga su derecho a llevar una existencia digna.

La evaluación estandarizada fomenta la inequidad educativa ya que se olvidan “los extremos”. No queremos reducir ni demeritar el ámbito de la investigación en indicadores educativos, sino por el contrario, resaltamos una ventaja en lo que se refiere a la creación, organización y sistematización de instrumentos, técnicas, teorías alrededor de las mediciones que se efectúan en educación. Sin embargo, es importante situar el tipo de variables que estas valoraciones ofrecen.

Es de nuestro interés no sólo reconocer el problema y estudiar los fenómenos educativos que se generan, sino conocer y reconocer todas las aristas del mismo, incorporando a las discusiones sobre equidad educativa a un sector educativo reconocido como talentoso y exitoso pero excluido de la atención educativa, por su misma condición de éxito. Estas hipótesis son requerimientos necesarios que una política pública debería considerar si se pretende un impacto en la operación del sistema educativo de un país.

En Canché (2013) se trabajó con una población de niñas y niños con talento en donde nos propusimos caracterizar algunos de los principales rasgos de su pensamiento matemático, para ello, entre otros instrumentos, planteamos una herramienta denominada “perfil de pensamiento matemático” reconociendo los argumentos matemáticos relativos al liderazgo, la toma de decisiones y la socialización de los conocimientos. Indagamos reflexiones, decisiones y actitudes hacia una situación problemática, al plantear posibilidades de abordaje basadas en diferentes niveles de organización y significación de los saberes matemáticos. Este ítem es parte de dicho perfil:

1) **El movimiento**

Carolina estudia en una escuela cercana a su casa. Su hogar se encuentra sobre la misma avenida que la escuela, por lo que no tiene que atravesar otras calles durante su trayecto. Cuando el terreno es plano, Carolina camina aproximadamente a una velocidad de 0.8 metros por cada segundo (m/s), cuando es de subida a 0.5 m/s y cuando es de bajada 3 m/s.

¿Cuál de las siguientes explicaciones te convence más para explicar a algunos compañeros el desplazamiento de Carolina? Señala el inciso que explique tus razones.

Considera también este dibujo:

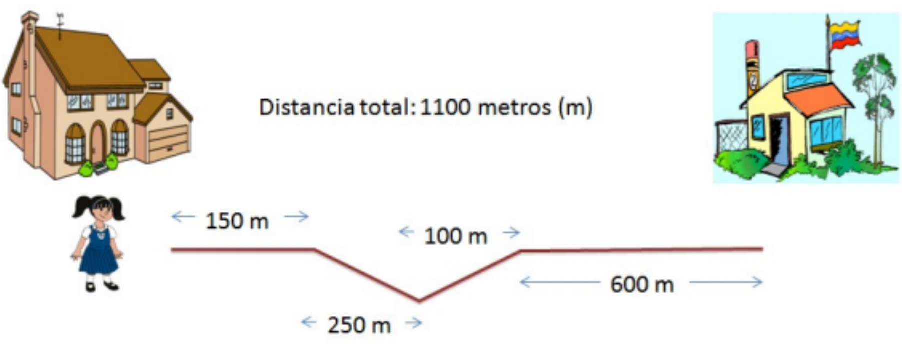



*Figura 4*. Ítem de movimiento, en el perfil de pensamiento matemático (Canché, 2013).

Para su resolución se presentan tres opciones de explicación del movimiento involucrado en la situación. La primera explicación se basa en un análisis puntual pero donde los puntos son justamente donde se sabe cierta información. Esto requiere de selección y comparación de la información relevante que subyace al problema. Esta primera elección también nos permite indagar las formas de organizar los datos y al encontrarse explícitos en una tabla, esto es, nos revelan las fuentes de explicación o argumentación que las niñas y niños ocupan.

La segunda explicación nos permite explorar argumentos icónicos y relativos a las sensaciones que pueden emerger de un problema al preguntar sobre la comunicación del fenómeno del movimiento al cual se refiere. Las representaciones visuales del fenómeno nos representan hipótesis que apuntan a otras cuestiones como el cansancio o agotamiento físico, aspectos secundarios del problema, pero experienciales.

La explicación tres involucra conceptos como el tiempo, la rapidez y la distancia referenciados en ejes coordenados mediante una gráfica. La movilización de los conocimientos y significados que están involucrados es adecuada para hacer emerger una construcción de ideas sobre la gráfica como modelo para argumentar situaciones sobre el movimiento, el cambio y la posición. El empleo de la gráfica para argumentar y discutir la variación del movimiento, representa un nivel importante de pensamiento y razonamiento matemático al reconocer, interpretar y proceder en las explicaciones sobre los datos del fenómeno.

Es importante mencionar que cada una de las explicaciones tiene un segundo cuestionamiento que nos permitirá entender las justificaciones de las elecciones como análisis y toma de decisión. Los niveles de abstracción, inferencia, generalización de las relaciones funcionales expuesta en las argumentaciones nos permiten determinar las decisiones de cada participante, pero, dadas las diferencias, también fue posible indagar sobre cómo se relacionan a un problema, mediante qué acciones y de qué forma. Cabe mencionar que no buscamos la selección de una respuesta correcta, de hecho, todas ellas tienen un grado de validez relativo al sujeto.

En este sentido, conviene precisar que la apuesta a la cual hacemos referencia (Todos tenemos talento y todos podemos desarrollarlo), alude a la diferenciación más que a la particularidad; va más allá de la consideración de que todos tienen las mismas necesidades educativas o que haya que igualar condiciones de aprendizaje. La potencia de una política equitativa promovería que el éxito de la educación se base en que cada uno de los estudiantes alcance su nivel, realice sus metas y potencialidades y no se quede por debajo de ellas. Y por el lado contrario, el fracaso de estas políticas estaría entonces en impedir ese óptimo desarrollo al considerar ciegamente y aplicar en forma homogénea los resultados de los estándares estadísticos. Esto impediría, en definitiva, la construcción social.

## 4. Nivel político: Estructura, organización y socialización de la visión equitativa de educar para potenciar el talento

### *4.1. Matemática educativa y equidad*

Equidad no es lo mismo que igualdad. Equidad tiende hacia lo integral. La igualdad, en cambio, tiene como límite (en términos matemáticos, tiende) a lo idéntico, lo homogéneo. En materia de educación la noción de equidad surge en discusiones en torno a las condiciones sociales para que se dé el aprendizaje en la escuela; esto es en términos de justicia educativa, en primera instancia para que así suceda y luego para que se dé en las mejores condiciones, tanto en materiales como en los procesos mismos.

El término *equidad* también tiene que ver con *diferencia*, en el trato justo de las mismas. Por ejemplo, si habláramos de un aula con rasgos equitativos no nos referimos a una que únicamente garantice disponibilidad de espacios o materiales (igual repartición de los recursos) sino a la que, por derecho, garantice que tanto los recursos como las oportunidades de aprendizaje sean accesibles y que la adaptabilidad a ello (que sería diferente en cada una) definiera el éxito de los actores en el proceso.

Desde la investigación en matemática educativa el tema de la equidad es reciente y se le ha abordado desde múltiples e interesantes enfoques como el social, el político, económico y desde fenómenos que aluden tanto a la universalidad del problema (*policy*) como a su particularidad (género, raza, condición económica, etnicidad y clases sociales), por decirlo de algún modo. (Ejemplos del tema pueden encontrarse en: Bishop & Forgasz, 2007; Leder, 1992; Secada, Fennema, & Adajian, 1995; Skovsmose & Greer, 2012; Valero, 2004; entre otros). Sin embargo, dada su fuerte connotación con el acceso democrático a la educación en general representa una potencial línea de investigación específicamente con la incorporación al análisis desde el conocimiento matemático desde su valor y uso; desde la naturaleza del saber donde se origina y en el análisis de sus funciones a nivel cognitivo, didáctico, social y cultural de la vida de los seres humanos.

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa nace en el campo de las ciencias sociales como una disciplina que intenta, entre otras cosas, indagar y generar evidencia empírica para conocer las relaciones entre el papel de la mente, el saber y la cultura en la construcción social del significado en matemáticas; particularmente evaluar el papel del medio en el *comportamiento inteligente.* Tomando a éste desde las prácticas y acciones deliberadas de una comunidad en la construcción de significados compartidos desde su relación con el saber y desde su carácter funcional (Cantoral, 2013).

Esta propuesta teórica genera subsecuentemente líneas emergentes de análisis científico para consolidar alternativas de acción e intervención educativa que resultan de extender la visión tradicional centrada en los objetos matemáticos a proponer una construcción de conocimiento basada en prácticas y sus modificaciones, para hablar conceptualmente del desarrollo cognitivo y del aprendizaje en su versión extendida, a realidades que van más allá del espacio institucional y educativo, donde el comportamiento inteligente resulta de interacción de dualidades: individuo-colectivo, conocimiento-saber y práctica-actividad.

Desde este panorama la problemática se amplía a mirar que lo único estable es el discurso matemático escolar; lo demás es situado y contextual. Se tiende a homogeneizar perfiles educativos, rasgos socioculturales, capacidades y aptitudes; generándose fenómenos de exclusión educativa. Esta situación implica estudiar con detalle cuestiones de género, de profesionalización docente, de apropiación del conocimiento y de la base teórico-metodológica para la generación de políticas educativas que reconozcan nuestra identidad y realidad mexicana.

## 5. Reflexión final

También es cierto que la equidad no se puede ni estudiar, analizar o teorizar desde el individuo en sí mismo; ni tampoco con alguno de los actores educativos. Se trata de involucrar al sistema e incluso partir de afectar ideologías o creencias. El rol actual de la escuela y los fines de la educación contemporánea promueven intensamente la apropiación estandarizada de conocimientos relativos al crecimiento secuenciado y dirigido a la actuación profesional y social (estudiante como profesionista y como ciudadano).

Si hablamos de "los usos de la matemática" y potenciamos una educación en el mismo sentido, características (clásicamente asociadas al talento en matemáticas) como la creatividad, la argumentación, la formulación de analogías, etc., tienen apertura y entran al debate como características que todo ser humano puede emplear y desarrollar. Por el contrario, si se mantiene la percepción de las matemáticas como formulaciones analíticas o procesos complejos de pensamiento, es muy difícil que las oportunidades de su apropiación sean accesibles en todos los individuos. El peso entonces deja de estar en el conocimiento puesto que las tomas de decisiones asociadas al uso de las matemáticas (el uso es relativo y en constante transformación) se organizan, reorganizan, se construyen.

Esto demuestra una tendencia dinámica y contextual de las manifestaciones talentosas en matemáticas. El perfil basado en la prueba de pensamiento matemático presume de un cambio de estándares de logro y rendimiento hacia los comportamientos, conductas, formas de pensar, argumentar, razonar… mediante prácticas que incluso tengan que ver con la evaluación de los procesos. Esto puede ser también considerado como éxito en una visión contemporánea y de construcción social.

Algunos podríamos coincidir en que la gran distancia que se percibe entre la matemática escolar y la vida cotidiana se debe al referente técnico, formal y estructurado que permanece en la versión de matemática clásica (números, fórmulas, derivadas e integrales) y la búsqueda, quizá literal, de una aplicación real por concepto matemático escolar. La alternativa es la funcionalidad por encima de la aplicabilidad rutinaria o simplemente utilitaria. La matemática no es solamente una herramienta para entender la realidad en la que vivimos, sino que constituye una organización de decisiones, comportamientos, conocimientos; particularmente un proceso de construcción de conocimientos y saberes sobre la base de un intercambio y un diálogo de argumentos, usos, significados.

## Referencias bibliográficas

Bishop, A. J., & Forgasz, H. J. (2007). Issues in access and equity in mathematics education. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1145–1167). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Blanco, E. (2009a). Eficacia escolar y desigualdad: Aportes para la política educativa. *Perfiles Latinoamericanos*, *17*(34), 51–85.

Blanco, E. (2009b). Eficacia escolar y clima organizacional: Apuntes para una investigación de procesos escolares. *Estudios Sociológicos*, *27*(80), 671–694.

Blanco, R. (1999). Hacia una escuela para todos y con todos. *Boletín del Proyecto Principal de Educación para América Latina y el Caribe,* 48, 55–72.

Bralic, S., & Romagnoli, C. (2000). *Niños y jóvenes con talentos: Una educación de calidad para todos*. Santiago: Dolmen Ediciones.

Briceño, E. (2013). *El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Borland, J. H. (2005). Gifted education without gifted children: The case for no conception of giftedness. In R. Sternberg & J. Davidson (Eds.), *Conceptions of Giftedness* (pp. 1–19). New York: Cambridge University Press.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Canché, E. (2013). *Matemática educativa y equidad: Un estudio socioepistemológico del talento en matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Canché, E., Farfán, R. M., & Simón, M. G. (2011). Género y talento en matemáticas. *Revista Venezolana de Estudios de la Mujer*, *16*(37), 123–136.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 255–270.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual.* México, DF: Pearson Educación.

Chiavenato, I. (2002). *Gestión del talento humano.* México: McGraw-Hill.

Cordero, F., & Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo* (3ª ed.). Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Del Caño, M. (2001). Formación inicial del profesorado y atención a la diversidad: Alumnos superdotados. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 40, 135–147.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Farfán, R. M. (2013). *Lenguaje gráfico de funciones: Elementos de precálculo*. México: Secretaría de Educación Pública.

Farfán, R. M., Simón, M. G., & García, M. A. (2016). Género y talento en matemáticas. Análisis del Programa Niñ@s Talento en México, DF. En R. M. Radl & L. D. Rocha (Eds.), *Educación, género y dinámicas sociales diversas en el contexto transnacional* (pp. 83–104). Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, Universidad de Santiago de Compostela.

Feldhusen, J. F. (1995). Identificación y desarrollo del talento en la educación (TIDE). *Ideacción*, 4, 12–19.

Feldhusen, J. F. (1996). Talent as an alternative conception of giftedness. *Gifted Education International*, *11*(3), 124–127. doi:10.1177/026142949601100302

Howson, A. G., & Kahane, J.-P. (Eds.). (1990). *The popularization of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Howson, A. G., & Wilson, B. (Eds.). (1987). *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90*. València: Mestral Libros.

Leder, G. C. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 597–622). New York: Macmillan.

Lim, C. S. (1999). *The public images of mathematics* (Unpublished doctoral thesis). University of Exeter, United Kingdom.

Lorenzo, N., & Ruedas, M. (1995). Diversitat: L'ampliació d'un concepte. *Guix: Elements d'Acció Educativa*, 217, 25–29.

Lorenzo, R. (2006). ¿A qué se le denomina talento? – Estado del arte acerca de su conceptualización. *Intangible Capital*, *2*(1), 72–163.

Lorenzo, R., & Martínez, M. (2003). ¿Talento, precocidad, superdotado o genio?. En M. Martínez (Ed.), *Inteligencia, creatividad y talento: Debate actual* (pp. 167–175). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Mönks, F. J., & Mason, E. J. (2000). Developmental psychology and giftedness: Theories and research. En K. Heller, F. Mönks, R. Sternberg, & R. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (pp. 141–155). Oxford: Pergamon Press. doi:10.1016/b978-008043796-5/50010-3

Perleth, C., & Heller, K. A. (2009). Adapting conceptual models for cross-cultural applications. *FAISCA, Revista de Altas Capacidades¸ 14*(16), 76–95.

Pfeiffer, S. I. (2011). Current perspectives on the identification and assessment of gifted students. *Journal of Psychoeducational Assessment, 30*(1), 3–9. doi:10.1177/0734282911428192

Piirto, J. (1995). Deeper and broader: The pyramid of talent development in the context of a giftedness construct. *The Educational Forum*, *59*(4), 363–370. doi:10.1080/00131729509335068

Raglianti, M. (2009). Familias de niño con talento académico: Una experiencia en Chile a través de escuela para padres (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, España. Recuperado de http://eprints.ucm.es/9753/1/T31622_.pdf

Secada, W. G., Fennema, E., & Adajian, L. B. (Eds.). (1995). *New directions for equity in mathematics education.* Cambridge: Cambridge University Press.

SEP. (2002). *Programa nacional de fortalecimiento de la educación especial y de la integración educativa*. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Básica y Normal, Dirección General de Investigación Educativa.

Simón, M. G. (2015). *El talento en matemáticas de mujeres adolescentes. Una caracterización desde el enfoque socioepistemológico y la perspectiva de género*. (Tesis doctoral). Cinvestav, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.F. Recuperado de https://doi.org/10.13140/rg.2.1.2005.4169

Skovsmose, O., & Greer, B. (2012). *Opening the cage: Critique and politics of mathematics education*. Rotterdam: Sense Publishers.

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar: Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *13*(4-II), 319–333.

Valero, P. (2004). Socio-political perspectives on mathematics education. In P. Valero & R. Zevenbergen (Eds.), *Mathematics Education Library: Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (pp. 5–23). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/1-4020-7914-1_2

White, L. A. (1988). *La ciencia de la cultura: Un estudio sobre el hombre y la civilización*. Barcelona: Círculo de Lectores.

Winner, E. (2000). Giftedness: Current theory and research. *Current Directions in Psychological Science*, *9*(5), 153–156.

Zaldívar, J. D. (2009). *Una caracterización de la función de un escenario de difusión de las ciencias desde una visión socioepistemológica: El caso de la resignificación de lo estable* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México.

Zaldívar, J. D. (2012). *Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en un escenario del cotidiano* (Memoria predoctoral, no publicada), Departamento de matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional, México.

Zaldívar, J. D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, M., & Cordero, F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: Un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *17*(4), 417–436. doi:10.12802/relime.13.17421

Zorrilla, M. (2003). La investigación sobre eficacia escolar en México. Estado del Arte. En F. J. Murillo (Ed.), *La investigación sobre eficacia escolar en Iberoamérica: Revisión internacional del estado en cuestión* (pp. 353–390). Bogotá: Convenio Andrés Bello, Centro de Investigación y Documentación Educativa.

# Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica

**Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla**
*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna*
**Silvia Sbaragli**
*Dipartimento Formazione e Apprendimento, Locarno, Svizzera*
*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Università di Bologna*

**Abstract.** *The studies on the nature of mathematical objects are manifold; they are needed not only when the scope of the study is epistemological but also (and perhaps more) when dealing with topics related to research in mathematics education. In this direction, the paper traces many classical and new analyses to make sense of certain current trends in mathematics education.*

*Keywords:* mathematical objects, mathematical concepts, scheme, realism, pragmatism, semiotic, EOS, objectivation theory, sociology, metacognition.

**Sunto.** *Gli studi sulla natura degli oggetti matematici sono molteplici; essi sono necessari non solo quando l'ambito di studio è quello epistemologico ma anche (e forse di più) quando si vogliono affrontare temi inerenti alla ricerca in didattica della matematica. In questa direzione, questo testo ripercorre molte analisi classiche e nuove per dare un senso a certe tendenze attuali della didattica della matematica.*

*Parole chiave:* oggetti matematici, concetti matematici, schema, realismo, pragmatismo, semiotica, EOS, teoria della oggettivazione, sociologia, metacognizione.

**Resumen.** *Los estudios sobre la naturaleza de los objetos matemáticos son múltiples; estos son necesarios no sólo cuando el alcance del estudio es epistemológico sino también, y tal vez más, cuando se quiere hacer frente a cuestiones relacionadas con la investigación en educación matemática. En este sentido, este texto vuelve a trazar muchos análisis clásicos y nuevos para dar sentido a algunas de las tendencias actuales en educación matemática.*

*Palabras clave:* objetos matemáticos, conceptos matemáticos, esquema, realismo, pragmatismo, semiótica, EOS, teoría de la objetivación, sociología, metacognición.

## 1. Premessa

Questo articolo può essere considerato come la prosecuzione a distanza di due precedenti (D'Amore, 2001a, 2001b), pubblicati in italiano e altre lingue, proposti in forma ridotta in varie occasioni, come seminari o conferenze in convegni internazionali.

A distanza di tanti anni, anche grazie agli studi e alle successive ricerche dei tre autori, alcune delle idee di allora sono state modificate e approfondite; non solo, ma sono sempre più stretti i rapporti di ricerca con studiosi del calibro di Juan D. Godino e Luis Radford.[1]

Appare dunque necessario ri-fare il punto sul tema relativo alla natura degli oggetti della matematica che appare oggi ancora più strettamente connesso con le sempre più numerose ricerche fondazionali in didattica della matematica.

## 2. Riflessioni di base

Attorno alla natura dei concetti sono stati scritti libri interi e filosofi di primo piano si sono occupati di questo tema.[2]

Nei dizionari di filosofia si trovano definizioni abbastanza simili relativamente all'idea di *concetto*; quelle di stampo aristotelico fanno riferimento a quei procedimenti che rendono possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili (Abbagnano, 1971, p. 146). Da notare che, in questa accezione:

- Il concetto è un processo, dunque qualche cosa di dinamico e non di statico.
- Vi può essere concetto di qualsiasi cosa, dagli oggetti concreti (il concetto di *tavolo*) a quelli astratti (il concetto di *numero 3*); da quelli reali a oggetti irreali, inesistenti, immaginari (il concetto di *cavallo alato*).
- C'è differenza tra *nome* e *concetto*; basti pensare che nomi diversi possono essere pertinenti allo stesso concetto.

A questo punto scattano due problematiche fondamentali:

- la *natura* del concetto;
- la *funzione* del concetto.

La domanda sulla *natura* del concetto ha avuto, in filosofia, due risposte piuttosto diverse:

- Il concetto è l'*essenza* stessa delle cose e dunque la loro essenza necessaria (ciò per cui le cose non possono che essere così come sono); pur tra mille diversità, ovviamente, diremmo che questa idea, nata con Socrate, raffinata da Aristotele, ha avuto molti seguaci fino a Husserl.

---

[1] Si vedano: D'Amore, 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b, 2007c, 2008, 2011, 2012; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi e Sbaragli, 2009; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi e Sbaragli, 2011; D'Amore, Font e Godino, 2007a, 2007b; D'Amore e Godino, 2006, 2007; D'Amore e Radford, 2017; D'Amore, Radford e Bagni, 2006; D'Amore e Sbaragli, 2005; Radford e D'Amore, 2006; Santi e Sbaragli, 2007; Sbaragli, 2005.

[2] Per la redazione di questo paragrafo 1, prendiamo spunto prevalentemente da D'Amore (1999a), cap. 6.

- Il concetto è il *segno* dell'oggetto, dunque si trova con esso in rapporto di significazione; l'idea è sostanzialmente stoica, ma ripresa in epoca medioevale, risalendo forse a Boezio e poi ad Abelardo; ma è stata fatta propria dai logici dell'inizio del XX secolo.

La domanda sulla *funzione* del concetto ha dato luogo a due concezioni fondamentalmente diverse:

- di tipo *finale*:
  - Il concetto ha come scopo quello di esprimere o rivelare la sostanza delle cose.
- di tipo *strumentale*; e allora si hanno vari ulteriori aspetti:
  - Il concetto è uno strumento per *descrivere* gli oggetti e permetterne il *riconoscimento* (Epicurei e Stoici, anticamente; alcuni filosofi della scienza nel XX secolo).
  - Il concetto è uno strumento per *classificare* i concetti nel modo più *economico* possibile (a questa idea aderisce, per esempio, Mach; e qui si scatena la questione secondo la quale quelli scientifici sono degli pseudo-concetti nel senso crociano).
  - Il concetto è uno strumento per *organizzare* i dati dell'esperienza in modo da stabilire tra essi *connessioni* di carattere logico (idea accettata da Duhem).
  - Il concetto è uno strumento per *prevedere* (possiamo citare qui Dewey e Quine, per esempio, anche se per motivi completamente diversi).

Tutt'altro modo di discorrere filosoficamente dei concetti è quello di scuola francese e tedesca. Più che *definire* i concetti, si cerca di analizzare *come si formino* i concetti. Abbiamo allora le seguenti distinzioni:

- Concetti *a priori* o concetti *puri* (Kant): sono i concetti che non si traggono dall'esperienza: concetti di unità, di pluralità eccetera; troviamo tali esempi proprio in Kant.
- Concetti *a posteriori* o concetti *empirici*: sono nozioni generali che definiscono classi di oggetti dati o costruiti; esempio: concetto di *vertebrato*, di *piacere* eccetera; essi concernono tutti e soli quegli individui che formano queste classi, sia quando li si può isolare (*un* gatto, scelto nella classe dei vertebrati) sia quando tale isolamento è impossibile (come sarebbe nel caso di *un* piacere).[3]

Dato che ci si riferisce a classi, è chiaro come si possa parlare, in ogni caso, di *intensione* e di *estensione* di un concetto (naturalmente si devono ammettere concetti ad estensione vuota ...).

Ma che cosa vuol dire, etimologicamente, *concetto*? Il suo nome latino (*conceptus*, da *concipere*) fa chiaro riferimento al risultato dell'atto di

---

[3] Questa è, per esempio, la posizione assunta da André Lalande nel suo *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (Lalande, 1926).

concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo giungere a una significazione universale. Ma allora si potrebbe pensare a una coincidenza con la parola *idea*; oppure si potrebbe far coincidere il concetto con il λόγοζ (il *verbum*, la parola mentale); oppure ancora con *nozione*.

Ciascuna di queste interpretazioni (e altre ancora) vennero nel tempo sostenute da eminenti filosofi.

Ciò ci autorizza a confondere d'ora in poi *concetto* con *idea*, anche se in *idea* c'è implicita anche una sorta di *rappresentazione* mentre il *concetto* potrebbe esserne indipendente.

Se si passa a dizionari della lingua comune, non filosofici, editi per esempio in Italia, si trova:

- "Ciò che la mente intende e comprende per mezzo dell'osservazione, riflessione e induzione" (Zingarelli, 1994, p. 416); a volte, oltre a intende e comprende, c'è un *conclude*.
- "La creatura concepita – la cosa immaginata e inventata dal nostro intelletto" (Fanfani, 1855, p. 382).
- "Pensiero che la mente forma derivandolo da due o più idee, assurgendo dall'individuale al generale; [ma anche:] idea, opinione" (Melzi, 1928, p. 206).
- "Pensiero, in quanto concepito dalla mente; più in particolare: idea, nozione esprimente i caratteri essenziali e costanti di una data realtà che la mente si forma afferrando insieme (...) i vari aspetti di un determinato oggetto che alla mente preme aver presenti nel suo complesso" (Istituto Giovanni Treccani, 1929, p. 342).

Su un dizionario a carattere filosofico si trova:

- "Nel suo significato etimologico è il risultato dell'atto di concepimento o generazione della mente nel suo staccarsi dall'immediatezza delle impressioni sensibili e delle rappresentazioni particolari e nel suo assurgere ad una significazione universale" (Centro di studi filosofici di Gallarate, 1957, p. 1538).

Interessante può essere, per i nostri scopi introduttivi, vedere che uso fanno di questo termine alcuni letterati. Dante Alighieri usa *concetti* nel senso di *concezioni* in *Paradiso* III 60; in questo stesso senso, lo si trova in molti letterati di tutti i Paesi del mondo. Ma è chiaro che i letterati fanno l'uso più vasto possibile di tale parola, come del resto si fa, ed è giusto che si faccia, nella lingua comune, dove *concetto* sta anche per *opinione*, *modo di intendere, principio, progetto, intenzione, stima, reputazione* eccetera, a seconda della lingua.

Tutto ciò solo per testimoniare l'enorme difficoltà e le varietà interpretative che si incontrano quando si voglia affrontare in modo significativo e un po' rigoroso una problematica che pone a monte di tutto una parola per la cui definizione sono state impiegate migliaia di anni.

## 3. Concetti: terminologia psicologica, sul versante didattico

Se vogliamo fare progressi significativi e specifici, occorre cercare testi più adatti, più consoni allo spirito nell’ambito del quale vogliamo muoverci.

Non possiamo allora non ricordare immediatamente che Vygotskij (1960/1981, 1934/1962) lavorò a lungo proprio sulla formazione dei concetti nell’ambito di un suo più vasto campo di ricerca sul come cause sociali influiscano sulle differenze psichiche degli individui (influenza dell’ambiente sulle differenze psichiche). Egli parla allora proprio di *sviluppo concettuale*, distinguendo sostanzialmente tre fasi (la cosa è in realtà assai più complessa, ma qui sorvoliamo):

- *fase dei mucchi sincretici*, caratterizzata dalla mancanza di una referenza oggettiva stabile nella classificazione;
- *fase del pensiero per complessi*: il soggetto tende verso un modo oggettivo di pensare, riconosce nessi concreti, ma non logici o astratti;
- *fase concettuale*: il soggetto opera utilizzando la capacità di astrarre.

Attenzione particolare Vygotskij pose alla formazione dei concetti scientifici in particolare di tipo scolastico, durante l’infanzia, evidenziando l’ancoraggio che i bambini fanno di tali concetti a componenti concreto-figurative, molto prima che alle componenti logiche o astratte; tale priorità sembra essere necessaria per la fondazione stessa del concetto. A proposito dell’ordine dell’acquisizione dei concetti, Vygotskij (1934/1962) fa una celebre affermazione, a prima vista paradossale, secondo la quale i concetti scientifici si sviluppano *prima* di quelli spontanei; ma Vygotskij dice anche: “se il programma fornisce il materiale appropriato” (p. 147); insomma: la supposta necessità infantile di far precedere una fase empirica a quella astratta di apprendimento non sembra essere così totalmente spontanea. [Torneremo sui concetti scientifici e su Vygotskij in sezione 5].

Questa posizione non può non richiamare alla mente quella di Bruner (1964), quella della celebre terna dei modi di rappresentazione dei concetti:

- *esecutiva*,
- *iconica*,
- *simbolica*,

che, per inciso, si riferiva principalmente proprio alla matematica.

Facciamo un esempio celeberrimo: l’acquisizione del concetto di misura da parte dei bambini di età 3–5 anni; e contrapponiamo le modalità di Piaget a quelle di un famoso appartenente alla scuola sovietica, Gal’perin.

Nella descrizione che fanno Piaget, Inhelder e Szeminska (1948) dell’apprendimento spontaneo del concetto di misura, al bambino si propongono situazioni empiriche in cui si richiede di misurare, fino ad arrivare a un concetto astratto, rispettando la teoria degli stadi evolutivi. Il comportamento del bambino seguirebbe un famoso *iter*, molto diffuso ancora oggi nella scuola dell'infanzia e nel primo ciclo della scuola primaria non solo italiana: misure spontanee con unità non standard (palmi, matite, gomme, passi eccetera), con predominanza dell'attività percettiva; scelta più accurata dell'unità di misura, capacità di riportare più volte l'unità; consapevolezza della conservazione delle grandezze (e delle misure). Come si vede: abbondanza di terminologia tipicamente piagettiana.

La prova di Gal'perin (1969/1977) lega di più la misurazione all'idea di numero anche basandosi sulle idee fondazionali di Kolmogorov, il celeberrimo matematico russo, fondatore, tra l'altro, della teoria assiomatica della probabilità. La prima tappa è di giungere all'idea di unità; poi al fatto che la misura rispetto a una data unità è un numero che può essere ricordato anche senza saperne il nome. Per esempio un tavolo misura come 5 matite; un bambino può anche non conoscere il nome di questo numero, ma fare riferimento a questa quantità, semplicemente mettendo da parte una matita ogniqualvolta questa unità è usata; a quel punto la misura viene fatta coincidere con il numero di volte in cui l'unità è stata usata. Altro esempio diffuso è riempire una brocca con dei bicchieri d'acqua per valutarne la capacità; la tal brocca contiene tanta acqua quanto quei bicchierini raccolti accanto. Per finire, riconoscimento e accettazione della relatività del numero-misura, rispetto all'unità usata.

Ci pare che tutto ciò spieghi bene il perché dell'estremo interesse con il quale i più famosi teorici dell'apprendimento concettuale si siano interessati a questo tema; e continua a spingerci sempre più, almeno implicitamente, a capire che cosa essi intendano per *concetto*, almeno in ambito di apprendimento cognitivo.

## 4. I concetti nei processi di insegnamento-apprendimento

Si *devono* insegnare i concetti? Si *possono* apprendere i concetti? Più generale ancora: Hanno senso queste stesse domande?

Sono, le precedenti, questioni cardine sulle quali occorre riflettere e che troppo sbrigativamente e ingenuamente alcuni autori trattano.

Questa problematica si è sviluppata attorno agli anni '60, soprattutto nei paesi di lingua anglosassone, nel vastissimo movimento internazionale di rinnovamento dei curricoli che ha toccato tutto il mondo. Ciò è stato indotto certamente dalla grande rivalutazione educativa dei contenuti delle varie discipline e in particolare delle scienze e specificamente della matematica. In questo senso, certamente un artefice della svolta mondiale è stato Bruner.[4] Ciò portò di conseguenza un profondo dibattito sul curricolo soprattutto relativo

[4] Per capire il perché, si veda Tornatore (1974), cap. 9.

proprio al settore delle scienze in generale e della matematica in particolare.

Lo riassumiamo di seguito, cominciando da questa domanda, preliminare alle precedenti: a *che cosa* si deve educare, quando a scuola si fa scienza? Vi sono due risposte possibili:

- al *metodo scientifico*: l'obiettivo è di dare padronanza nella metodologia;
- all'acquisizione e padronanza dei *concetti essenziali* della scienza.

Il dibattito non era nuovo; la prima risposta si può certamente ricollegare al *metodo dell'intelligenza* di Dewey (1933/1961), ma gli anni '60 furono testimoni di un dibattito di fuoco all'interno del quale ebbero vita facile tutti coloro che propugnarono idee didattiche abbastanza ben congegnate.[5]

In questo dibattito, ben si inserisce un altro tipo di proposta, quella di Gagné (1965) che tende a separare la didattica dei concetti *concreti* da quella degli *astratti*; la concretezza e l'astrazione vanno viste in relazione alla qualità di riferimento degli oggetti considerati nei concetti:

- se si tratta di concetti derivati dall'osservazione empirica di oggetti, si tratta di *concetti concreti*;
- se si tratta di concetti derivati da definizioni e che implicano dunque relazioni astratte, si tratta di *concetti astratti*.

Gagné elabora una teoria delle gerarchie di apprendimento in cima alla quale, come ultimo punto, culminante, ci sono i concetti astratti.

Questa idea delle gerarchie spinse molti altri autori a ideare gerarchie simili, seguendo altri parametri; in particolare stiamo pensando ai lavori di Klausmeier, Gathala e Frayer (1974) e Klausmeier (1979, 1980) che dividono l'apprendimento dei concetti nella scuola di base in 4 livelli:

- *livello concreto*: il bambino riconosce un oggetto già visto, nella stessa situazione;
- *livello di identità*: il bambino riconosce un oggetto già visto, ma in condizioni diverse;
- *livello di classificazione*: il bambino riconosce che due cose sono simili per un certo aspetto e, generalizzando, le classifica insieme anche se non sono ancora chiari i criteri della classificazione;
- *livello formale*: il bambino sa dare un nome alla classe ottenuta nel terzo livello, cioè al concetto selezionato dagli attributi che gli hanno permesso la classificazione.[6]

A nostro avviso, in questa tipologia di analisi apprenditiva rientra la famosa gerarchia degli apprendimenti dovuta ai coniugi Van Hiele (1986) (si vedano: D'Amore, 1999a, pp. 86–89; Sbaragli & Mammarella, 2010). In tale modello

---

[5] Sul dibattito, ma molto di più, si può vedere Pontecorvo (1983, pp. 262–263).

[6] Maggiori chiarificazioni generali, specifiche sui legami tra i livelli di Klausmeier, le fasi di Gagné e gli stadi di Piaget, nonché esemplificazioni di applicazioni didattiche, possono essere rintracciate in Pontecorvo (1983).

si propongono 5 livelli di sviluppo del pensiero geometrico: *visivo, descrittivo-analitico, confronto, assiomatico, rigore.* In particolare:

- il livello zero, di base, della *visualizzazione*, del riconoscimento, nel quale le figure vengono riconosciute per la loro forma, nel complesso prototipico e non per le singole proprietà costitutive;
- il livello uno, *descrittivo* o *analitico*, nel quale si fa strada un complesso di relazioni fra le proprietà delle figure, ma come staccate, separate tra loro, il che permette di riconoscere proprietà delle figure o di loro classi, ma non relazioni fra figure;
- il livello due, del *confronto*, delle deduzioni informali, nel quale lo studente sa prendere in considerazione relazioni strutturali che legano tra loro classi di figure sulla base delle loro proprietà, per esempio che il quadrato è anche un rettangolo perché, pur avendo il quadrato specificità proprie, soddisfa però alle richieste per definire un rettangolo;
- il livello tre, *assiomatico*, nel quale lo studente conquista la capacità di effettuare *deduzioni formali*;
- il livello quattro che in genere si chiama strutturale o del *rigore* geometrico, nel quale lo studente sa compiere relazioni fra diversi sistemi assiomatici (per esempio sa riconoscere analogie e differenza fra un sistema assiomatico della geometria di Euclide e quello di una geometria non euclidea).

La teorizzazione dei Van Hiele propone anche le cosiddette "fasi" che permettono di descrivere i passaggi nei precedenti livelli, dall'uno all'altro:

- la fase uno, di *ricerca*, nella quale si fonda soprattutto un vocabolario adeguato;
- la fase due, di *orientamento diretto*, durante la quale il docente indirizza le modalità analitiche degli allievi;
- la fase tre, di *esplicitazione*, durante la quale gli studenti sono sempre più indipendenti nel loro lavoro ed esprimono pareri personali svincolati dal processo proposto in precedenza dall'insegnante;
- la fase quattro, di *orientamento libero*, durante la quale lo studente prende in esame diverse strategie e impara a fare uso personale delle proprie capacità;
- la fase cinque, di *integrazione*, durante la quale l'allievo si responsabilizza delle sue azioni, arrivando dunque a un nuovo dominio di conoscenza che gli permette di vedere la geometria, i suoi oggetti e le sue relazioni, da una panoramica diversa.

L'analisi critica di questa prospettiva di analisi ha mostrato che essa è soprattutto uno strumento per l'organizzazione curricolare della geometria, dalla primaria all'università, piuttosto che una teoria dell'apprendimento.

Torniamo ora al discorso generale.

Sembra che gli studi di come si sviluppino i concetti riguardino soprattutto la fascia d’età 3–10 e che sia necessario intrecciare questa ricerca con quella didattica. Quindi: sviluppo dei concetti e apprendimento, secondo la maggior parte degli autori, sono molto legati tra loro.

Si può arrivare a pensare che punto culminante dell’ontogenesi sia l’organizzazione della conoscenza per categorie? Secondo Lurija (1982) sì, e i metodi utilizzati in questo senso, a suo avviso, sono i seguenti:

- Metodo della *definizione del concetto*: si chiede di rispondere in modo spontaneo e libero a domande del tipo: “Che cosa è?”; le risposte possono essere specifiche, riferite cioè a particolarità, o di tipo categoriale.
- Metodo della *comparazione-differenziazione*: dati due oggetti diversi ma con qualche caratteristica comune, si richiede di dire quali siano queste caratteristiche comuni e le reciproche differenze.
- Metodo della *classificazione*: si danno più oggetti e si chiede di classificare un insieme, formato da tutti e soli quegli oggetti aventi una data caratteristica comune.
- Metodo della *formazione dei concetti artificiali*: si torna a Vygotskij, dato che si dà rilievo a concetti non spontanei; lo sperimentatore ha preordinato tutto per giungere a un ben stabilito concetto cui si voleva pervenire.

Va tuttavia detto che non si può non essere d’accordo con Cornu e Vergnioux (1992) quando affermano: “L’apprendimento di un concetto isolato è impossibile, dato che ogni concetto è correlato, collegato, ad altri. Si deve parlare allora di trame concettuali” (pp. 55–56). Su questo punto dovremo tornare tra breve (e rinviamo già a D’Amore, 1999a).

## 5. Il ruolo del linguaggio nell’apprendimento e nella formulazione dei concetti

In tutto ciò, è evidente, gioca un ruolo di straordinaria importanza il linguaggio. È ben noto che, nella posizione indicata da Piaget, si è andati sempre più verso “una progressiva svalutazione cognitiva del linguaggio” (Pontecorvo, 1983, p. 292); esso

> va visto in relazione con la presa di posizione di Piaget contro ogni concezione che vede nella comunicazione sociale tramite il linguaggio l’origine del pensiero e contro ogni concezione che assimili i sistemi logici a sistemi linguistici (...) Il pensiero, insiste Piaget, non ha origine dal linguaggio (...) la “struttura” di un sistema operatorio non è struttura di un sistema di segni, ma struttura di un sistema di “azioni interiorizzate”. (Tornatore, 1974, p. 137)

Ecco allora perché Piaget assume la seguente posizione:

- l’immagine è un significante il cui scopo è di designare oggetti figurativamente;

- il concetto è un significato che ha come funzione di individuare caratteri costitutivi dell'oggetto rispetto ad altri termini della stessa classe (e non di nominarlo);
- la parola, segno verbale che designa il concetto, nulla aggiunge, quanto a conoscenza, al concetto stesso.

Ben diversa è la posizione di Vygotskij (1934/1962) che invece vede il linguaggio come mediatore tra individuo e cultura; egli asserisce che la formazione di un concetto avviene con un'operazione intellettuale "guidata dall'uso delle parole che servono per concentrare attivamente l'attenzione, astrarre certi concetti, sintetizzarli e simbolizzarli per mezzo di un segno" (Vygotskij, 1934/1990, p. 106).

L'organizzazione cognitiva del bambino riceve dunque, grazie al linguaggio, una dimensione che gli è propria, connaturata fin dal suo esordio: la dimensione *sociale*. Se è vero che il bambino impara a categorizzare nel rapporto linguistico con l'adulto, è però anche vero che forme embrionali di categorizzazione devono già essere presenti *prima* della sistemazione definitiva adulta di esse. Vygotskij stabilisce allora un confronto tra *concetti spontanei* (o quotidiani) e *concetti scientifici*:

- i primi hanno la caratteristica di essere relativi all'esperienza personale;
- i secondi fanno già parte di un sistema di concetti; la scuola ha, come effetto sulle competenze del bambino, lo scopo di dare una sistematicità ai concetti che egli già possiede e a quelli che man mano acquisisce.

Una posizione, questa, davvero rivoluzionaria, quella sulla quale si fonda gran parte della didattica odierna.

Vogliamo chiudere questa rapidissima carrellata su linguaggio e apprendimento dei concetti, ricordando, fra i tanti altri possibili, gli studi di Nelson (1974, 1977). Come abbiamo già messo in evidenza, il concetto, almeno dal punto di vista dell'apprendimento cognitivo, è interpretato oggi come qualche cosa di sempre più vasto, non più esclusivamente legato alle categorie, alle classi eccetera; concetto è, per la Nelson (1977), correlato ad un'acquisizione di conoscenza qualsiasi, purché questa sia "definita e incorporata in un contesto o in un sistema". Dunque, indipendentemente dal grado di generalità o di astrazione, quel che conta è che ci sia un quadro di riferimento, una rete di relazioni: "i concetti necessariamente esistono all'interno di un *framework* concettuale" (Nelson, 1977, p. 223).

Diventa allora decisiva per l'apprendimento di un concetto una mappa di conoscenze riferite, per esempio, a un oggetto. L'esempio proposto dalla stessa autrice è relativo al termine "palla" in un'esperienza con un bambino di 12 mesi: la rete di relazioni che ruota attorno alla parola "palla" è relativa al luogo dove è stata vista, all'attività che altre persone fanno con essa, che il bambino stesso può fare con essa, a quali siano le caratteristiche funzionali dell'oggetto, i luoghi nei quali tutto questo può accadere eccetera. L'oggetto quindi è legato a tutta una rete relazionale, il cui complesso finisce con il costituire il concetto; e, come si è visto, la *parola* ha un ruolo decisivo. Con il passare del tempo, il bambino aggiungerà, a questa prima formazione del concetto, altri attributi, altre funzioni eccetera, in modo che il concetto potrà contenere elementi funzionali, relazionali, descrittivi, fino al termine che lo designa, sia individualmente sia collettivamente. È anche ovvio che qui c’è un legame fortissimo con gli *script*, pensati come quadri di riferimento più ampi all’interno dei quali collocare e situare questi concetti nelle varie fasi in cui si evolvono e si presentano. Tutto ciò permette di riconoscere i tratti identificativi del concetto, in modo da poter poi riconoscere nuovi esemplari che possono con il precedente condividere il *nome*.

Ma il punto finale è quello in cui, nonostante *script* e categorie diversi, il soggetto riesce, come si usa dire, a supercategorizzare:

> Sia le categorie sia gli *script* possono offrire quadri di riferimento per gli stessi concetti: infatti, non c’è ragione per cui concetti inseriti nell’uno o nell’altro contesto siano diversi nel contenuto o nella struttura. Ad esempio: gli orsi possono essere parte dello *script* relativo allo zoo o essere parte di una categoria tassonomica relativa agli animali. (Nelson, 1977, p. 223)

Si pensi a come queste riflessioni siano sotto gli occhi di tutti nell’attività di didattica della matematica, quando lo stesso concetto, introdotto in un particolare *script*, non viene accettato quando lo si ritrova in una categoria distinta (Bara, 1990, tutto l’ultimo capitolo).

Che cos’è che rende difficile la comprensione dei concetti? Qual è il livello in cui ci sono difficoltà di comprensione dei concetti?

Vi sono molteplici risposte. Intanto i diversi livelli di formazione dei concetti; studi su questo punto sono più frequenti nel mondo della didattica delle scienze naturali (Astolfi & Develay, 1989; Giordan & De Vecchi, 1987) e della storia (Clary & Genin, 1991). E poi l’esistenza di obiettivi-ostacolo (Astolfi & Develay, 1989; Meirieu, 1987). Ma questi temi esulano dal nostro percorso e non possiamo andare oltre; non possiamo che limitarci a suggerire la bibliografia appena elencata, lasciando ad altri il compito di affrontare tale tematica.

## 6. Attualità delle classiche definizioni di concetto e di schema date da Vergnaud

Vergnaud, in molteplici occasioni, ha affrontato la problematica di distinguere e definire le idee di concetto e di schema, termini oramai consueti negli studi di didattica della matematica (Vergnaud, 1990, pp. 133–134). Dopo aver dichiarato che la conoscenza razionale deve essere di tipo operatorio, definisce schema “l’organizzazione invariante del comportamento per una classe di situazioni date” (Vergnaud, 1990, p. 136). In particolare, molti dei suoi esempi sono tratti dall'ambito della matematica:

- la numerazione di una piccola collezione di oggetti da parte di un bambino di 5 anni necessita dell'applicazione di uno schema che gli permette di coordinare movimenti di occhi e mani e di coordinare con essi la sequenza numerica; in particolare c'è la costante significativa di un comportamento di tipo schematico nella ripetizione dell'ultimo nome numerale, pronunciato con tono diverso;
- la risoluzione di equazioni lineari da parte di adolescenti a suo avviso segue uno schema, un'organizzazione invariante;
- l'esecuzione dell'addizione in colonna di numeri naturali segue uno schema naturale;

eccetera.

Secondo Vergnaud, se si analizza criticamente la difficoltà di allievi nella risoluzione di compiti di matematica, per esempio di bambini alle prese con problemi di aritmetica, è in termini di *schemi* che occorre analizzare la scelta dei dati da usare, la scelta delle operazioni, specie quando vi siano più possibili scelte. Anche le procedure euristiche sarebbero nient'altro che schemi (Vergnaud, 2017).

Vergnaud introduce le fortunate idee di "concetto-in-atto" e di "teorema-in-atto"; si tratta delle conoscenze contenute negli schemi: si possono pure designare con l'espressione più comprensiva di "invarianti operatori". Secondo Vergnaud vi sono tre tipi logici di invariante operatorio:

- invarianti del tipo *proposizione*, quelli ai quali s'addice l'attribuzione di essere veri o falsi;
- invarianti del tipo *funzione proposizionale*; con questo possiamo intendere un'espressione che contiene una o più variabili individuali tali che, quando al posto di queste si mettono costanti individuali, si dà luogo a una proposizione;
- invarianti del tipo *argomento*: possono essere oggetti, relazioni, proposizioni, funzioni proposizionali, o altro: si tratta sostanzialmente di istanziazioni di variabili o esempi di funzioni proposizionali, o proposizioni stesse.

E torniamo ai concetti. Secondo Vergnaud, il punto decisivo nella concettualizzazione del reale e nella didattica è il passaggio dai *concetti-come-strumento* ai *concetti-come-oggetto* e una operazione linguistica essenziale in questa trasformazione è proprio la nominalizzazione. Ciò si potrebbe riassumente in una sola parola: *concettualizzazione*.

È allora fondamentale, irrinunciabile, anche da parte di Vergnaud, dare una sua definizione pertinente ed efficace di *concetto*; in più opere, pur con piccolissime variazioni, Vergnaud (1990, pp. 139 e segg.) ne suggerisce una che possiamo illustrare come segue.

Un *concetto* è una terna di insiemi:

$$C = (\text{S}, \text{I}, \mathcal{S})$$

dove:

- S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);
- I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il *significato*);
- *S* è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*).

Secondo Vergnaud, studiare come si sviluppa e come funziona un concetto significa considerare di volta in volta questi tre "piani" separatamente e in mutua relazione reciproca.

Queste idee di Vergnaud, pur facendo parte dei primi passi che la didattica ha compiuto negli anni '80, tendono a essere "dimenticate" dagli studiosi attuali; noi qui vogliamo ribadirne la centralità, l'attualità e l'importanza.

## 7. La svolta "antropologica": significato istituzionale e personale degli oggetti matematici[7]

Già a partire dagli anni '70, però, le domande sulla natura cognitiva dei concetti matematici e del significato degli oggetti matematici presero tutt'altra direzione.

> Una teoria del significato è una teoria della comprensione; cioè: quello di cui una teoria del significato deve rendere conto è ciò che si conosce quando si conosce il linguaggio, cioè quando si conoscono i significati delle espressioni e dei discorsi del linguaggio. (Dummett, 1991, p. 372)

dichiarava Dummet nel 1975. Pochi anni dopo, all'inizio degli anni '80, Brousseau (1981) si chiedeva: "Quali sono le componenti del significato deducibili dal comportamento matematico che si osserva nell'allievo? Quali sono le condizioni che portano alla riproduzione di un comportamento mantenendo lo stesso significato?" (p. 131). Non sarà, per caso, che esista una "varietà didattica" del concetto di senso, specifica per la matematica, mai studiata, mai evidenziata finora, in linguistica o in psicologia? (Brousseau, 1986).

L'accentuazione del bisogno di studi sui concetti centrati sui processi di apprendimento è proposta anche da Sierpinska (1990):

> Comprendere il concetto sarà (…) concepito come l'atto di acquisire il suo significato. Tale atto sarà probabilmente un atto di generalizzazione e sintesi di significati in relazione con elementi particolari della "struttura" del concetto (la "struttura" del concetto è la rete di significati degli enunciati che abbiamo considerato). Questi significati particolari devono essere acquisiti con atti di

[7] Per la redazione di questo paragrafo ci serviamo di D'Amore (2001a).

> comprensione. (...) La metodologia degli atti di comprensione si preoccupa principalmente del processo di costruire il significato dei concetti. (Sierpinska, 1990, pp. 27, 35)

Di fronte alla necessità di far luce sulla natura del significato, si è soliti fare riferimento a due categorie distinte nelle quali le teorie del significato possono essere divise: *teorie realiste* (o figurative) e *teorie pragmatiche*, divisione già apparsa in Kutschera (1979). Solo facendo chiarezza sul modo di concepire il *significato*, acquisterà senso parlare di *costruzione del significato* e dunque di *conoscenza matematica*. Descriveremo dunque brevemente la necessaria distinzione filosofica tra *teorie realiste* e *teorie pragmatiste*.[8]

Nelle *teorie realiste* il significato è "una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza suppongono un realismo concettuale" (Godino & Batanero, 1994, p. 329).

Come già asseriva Kutschera (1979): "Secondo questa concezione il significato di un'espressione linguistica non dipende dal suo uso in situazioni concrete, bensì avviene che l'uso si regga sul significato, essendo possibile una divisione netta fra semantica e pragmatica" (p. 29).

Nella semantica realista che ne deriva, si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come: 'Bertrand Russell') è l'oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso: Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come: 'A è un fiume') esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso: A è il nome di un fiume); i predicati binari (come: 'A legge B') designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso: la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l'unica funzione semantica delle espressioni.

Si riconoscono qui le basi delle posizioni di Frege, di Carnap, di Wittgenstein del *Tractatus*.

Una conseguenza di questa posizione è l'ammissione di un'osservazione scientifica (all'un tempo dunque empirica e oggettiva o intersoggettiva) come potrebbe essere, a un primo livello, una logica degli enunciati e dei predicati.

Dal punto di vista che a noi qui preme di più, se andiamo ad applicare i supposti ontologici della semantica realista alla matematica, se ne trae necessariamente una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture eccetera hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto appartengono a un dominio ideale; "conoscere", da un punto di vista matematico, significa "scoprire" enti e loro relazioni in tale dominio. Ed è pure ovvio che tale visione comporta un assolutismo della conoscenza matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non

[8] Per approfondimenti critici, storici ed epistemologici su questo tema, si vedano: Godino e Batanero (1994), D'Amore e Fandiño Pinilla (2001), D'Amore (2003).

modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti, ad essa estranee e da essa indipendenti.

Posizioni di questo tipo, seppure con diverse sfumature, furono sostenute da Frege, Russell, Cantor, Bernays, Gödel eccetera; ma trovarono anche violente critiche [il *convenzionalismo* di Wittgentsein e il *quasi empiricismo* di Lakatos: si vedano Ernest (1991) e Speranza (1997)].

Nelle *teorie pragmatiste* le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica oggettiva in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminarne i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti.

Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche*, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un "gioco linguistico", dato che in esso ha un modo di "uso" e un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere contestualmente significativa (Wittgenstein, 1953, 1976). Vogliamo anche segnalare come, secondo Bloor (1982), la visione pragmatista raccoglie la "eredità di Wittgenstein".

Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici e il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione. Insomma, dipendono dalle pratiche umane.

È ovvio che le teorie realiste e pragmatiste non sono del tutto complementari e nettamente separate, anche se, per motivi di chiarezza, abbiamo preferito dare questa impressione "forte" (Tabella 1).

Tabella 1
*Teorie realiste vs teorie pragmatiste*

| | TEORIE "REALISTE" | TEORIE "PRAGMATISTE" |
|---|---|---|
| *Significato* | Relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici | Dipende dal contesto e dall'uso |
| *Semantica vs pragmatica* | Divisione netta | Non divisione o divisione sfumata |
| *Obiettività o intersoggettività* | Totale | Mancante o discutibile |
| *Semantica* | Le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche | Le espressioni linguistiche e le parole hanno significati "personali", sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé |
| *Analisi* | Possibile e lecita: per esempio, la logica | Possibile solo un'analisi "personale" o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta |
| *Conseguente visione epistemologica* | Concezione platonica degli oggetti matematici | Concezione problematica degli oggetti matematici |
| *Conoscere* | Scoprire | Usare in opportuni contesti |
| *Conoscenza* | È un assoluto | È relativa alla circostanza e all'uso specifico |
| *Esempi* | Il Wittgenstein del *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel] | Il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* [Lakatos] |

Nella direzione pragmatista, ha rilievo la definizione di Chevallard (1991) di "oggetto matematico"; un *oggetto matematico* è

> un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli eccetera), vale a dire, registro della scrittura. (Chevallard, 1991, p. 110)

Essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un "emergente da un sistema di praxema" (Chevallard, 1991, p. 110).

In questa accezione, non ha più molto interesse la nozione realista ingenua di *significato di un oggetto* (di conoscenza, in generale; matematico, in particolare) quanto piuttosto quella di *rapport à l'objet*, rapporto, relazione all'oggetto. Su tale idea poggia la costruzione iniziale che Chevallard fa della sua "teoria della conoscenza", o meglio di una sua "antropologia cognitiva", all'interno della quale si può situare la didattica.

In tutto ciò è centrale la persona (o l'istituzione, come insieme di persone) che si mette in relazione all'oggetto, e non l'oggetto in sé:

> Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto *O* esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da *R*(X,*O*) (rispettivamente *R*(I,*O*)) e detto *relazione personale* da X ad *O* (rispettivamente *relazione istituzionale* da I ad *O*). (Chevallard, 1992, p. 76)

L'aver costretto il ricercatore a puntare tutta la sua attenzione sulle attività degli esseri umani che hanno a che fare con la matematica (non solo risolvere problemi, ma anche comunicare la matematica), è uno dei meriti del punto di vista antropologico, ispiratore di altri punti di vista, tra i quali quello che oggi si chiama antropologico: la TAD, teoria antropologica della didattica (della matematica) (Chevallard, 1999).

Il punto cruciale è che "la TAD pone l'attività *matematica*, e dunque l'attività *di studio* in matematica, *nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali*" (Chevallard, 1999, p. 221).

Questa posizione ha segnato una svolta interessante all'interno delle cornici teoriche nelle quali si situa ogni ricerca in didattica della matematica, tanto più se si sottolineano i successivi studi compiuti da più autori, per chiarire e rendere operative le nozioni di Chevallard, creando strumenti concettuali adeguati e paragonandoli a quelli messi in campo da altre posizioni al riguardo.

Per esempio, una chiarezza esemplare proviene dagli studi di Godino e Batanero (1994, 1998) perché in essi si definiscono in maniera rigorosa tutti i termini della questione: che cosa significa "pratica", che cosa è una "pratica matematica", una "pratica personale", che cosa è una "istituzione", che cosa una "pratica istituzionale", che differenza c'è tra oggetti personali e istituzionali e come si definisce ciascuno di essi, che cosa sono i significati di un oggetto personale e di un oggetto istituzionale, che legami ci sono tra significato e comprensione eccetera.

Per voler dare, in un colpo solo, una caratteristica di tale posizione, nella formulazione di Chevallard-Godino-Batanero l'essenziale è l'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di campi di problemi (fenomenologie), dalla quale emergono gli oggetti (concetti, termini, enunciati, relazioni, teorie eccetera), i quali sono relativi ai contesti istituzionali e personali. Tali contesti restano definiti secondo i campi di problemi che si hanno di fronte e gli strumenti semiotici disponibili. Tra breve dovremo tornare su questa posizione, con esempi significativi.

Prima di procedere, vogliamo affermare che, per spiegare l'enfasi con la quale si trattano i fenomeni tipici della cognizione umana nei lavori di Godino e Batanero (1994, 1998), è bene evidenziare che, mentre nel testo di Chevallard (1992) si dà maggior peso al contesto istituzionale rispetto al personale, Godino e Batanero tendono a privilegiare la "sfera del mentale", del singolo soggetto umano, per tentare un equilibrio tra i due contesti e per evitare che la sfera del personale sia occultata dal campo istituzionale. Il punto di vista ontosemiotico di Godino e Batanero è molto più attento alle questioni dell'apprendimento individuale, dunque a quegli aspetti psicologici che sono lasciati da parte e non presi in considerazione dal punto di vista antropologico.

Negli ultimi anni, D'Amore e Godino (2006) hanno disegnato i tratti caratteristici di due dei punti di vista usati come cornici teoriche nella ricerca in didattica della matematica, quello *antropologico* (Chevallard, 1992, 1999) e quello *ontosemiotico* (Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994). Lo scopo è quello di evidenziare analogie e differenze tra i due punti di vista, allo scopo di preparare il terreno a nuovi sviluppi teorici che, puntualmente, arrivarono (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017; D'Amore, Font, & Godino, 2010).

L'obiettivo di progredire nel paragonare e articolare modelli teorici, ha portato il punto di vista ontosemiotico (EOS) a formulare alcune "nozioni primitive" con un alto grado di generalità, come sono quelle di pratica matematica, istituzione, oggetto matematico, funzione semiotica e le dualità cognitivo-antropologiche (persona-istituzione, elementare-sistemico, ostensivo-non ostensivo, estensiva-intensiva, espressione-contenuto).

Questi strumenti offrono una piattaforma unificata a partire dalla quale è possibile affrontare i già ricordati compiti di paragone ed articolazione delle cornici teoriche usate in didattica della matematica. (Si vedano, ad esempio, D'Amore & Godino, 2007; D'Amore, Font, & Godino, 2007a, 2007b).

## 8. Evoluzione degli oggetti nella storia della matematica, come superposizione o come accumulazione di concezioni provvisorie[9]

Tenteremo qui una convergenza tra:

- una posizione squisitamente *didattico-cognitiva*, a carattere fortemente ingenuo, che accolga come ipotesi di base il costruttivismo della conoscenza più elementare, posizione basata sulle concezioni acritiche più diffuse;
- una posizione *antropologica* nella quale tutto è riferito al rapporto personale all'oggetto matematico nell'ambito di una teoria

[9] Per la redazione di questo paragrafo ci serviamo di D'Amore (2001a).

dell'apprendimento matematico che non sia caratterizzata da alcuna forma di preconcetto teorico o ontologico.

Questo paragrafo 8 è solo un tentativo di prima mediazione tra le posizioni più ingenue, ma radicate nel senso comune, e quanto fin qui esposto. Per correttezza, successivamente faremo alcune considerazioni critiche.

Siano $c_i$ le concezioni provvisorie, in un processo lineare ed evolutivo (almeno nel tempo) di assimilazione e accomodamento, relativamente a un oggetto matematico $C$. Occorre distinguere tra:

- $c_i$ *scientifiche* di tipo istituzionale, indipendenti dall'apprendimento, che diremo accademiche ($a$), cioè quelle che la comunità scientifica (accademica) accetta come pertinenti, significative e corrette: le chiameremo $c_i$ di tipo $a$;
- $c_i$ *cognitive* di tipo istituzionale, strettamente connesse a problematiche di tipo apprenditivo, che diremo scolastiche ($s$), dovute all'azione della scuola e alla noosfera, cioè quelle che una persona costruisce o ha costruito a scuola: le chiameremo $c_i$ di tipo $s$.

Le $c_i$ di tipo $a$ si differenziano da quelle di tipo $s$ solo perché le seconde sono necessariamente cronologicamente successive rispetto alle prime (cioè: gli indici deponenti sono di valore numerico inferiore), oppure perché sono criticamente meno ricche e più basate su sensazioni, sul buon senso, legate ad applicazioni, meno soggette a ripensamento e riflessione critica, più legate a varie clausole del contratto didattico (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

Il senso del processo didattico usuale, nella sua forma più ingenua, ma anche più diffusa, è di portare alla fine gli individui alla formazione di un oggetto $C$ che sia il culmine del processo evolutivo, *il* concetto, *l'*oggetto, supposto esistente, di tipo $a$ (o, per lo meno, il più vicino possibile a esso).

Siccome però ogni concezione è in evoluzione storico-critica *perenne*, è impossibile valutare il raggiungimento di questo limite, soprattutto perché si potrà al più parlare di "oggetto acquisito dalla comunità scientifica fino a ora" e non porsi nella situazione di dover prevedere il futuro di quell'oggetto.

L'"oggetto" è quindi, in questa concezione, qualche cosa di ideale, di astratto, punto culminante di un processo perennemente in atto, del quale abbiamo solo un'idea limitata all'evoluzione storica e allo stato attuale.

La formazione di $C$ a partire dalla successione $c_i$ può essere pensata secondo due modalità:

- *superposizione*: ogni concezione provvisoria $c_{m+1}$ aggiunge e integra la precedente $c_m$, cioè la comprende e le aggiunge qualcosa, sovrapponendosi ad essa (Figura 1);
- *accumulazione*: ogni concezione provvisoria $c_{m+1}$ aggiunge qualcosa (in più) alla $c_m$ precedente (Figura 2).

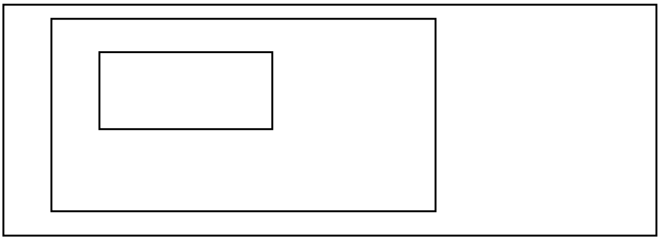


*Figura 1.* Superposizione di concetti.

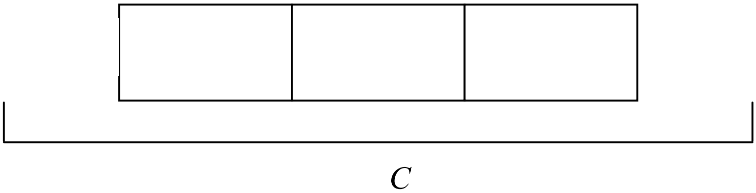



*Figura 2.* Accumulazione di concetti.

In realtà, si hanno spesso (sempre?) miscugli delle due modalità.

Esempio 1: *retta*.
Delineiamo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente a un supposto oggetto *retta*. Se si considera l'evoluzione dell'idea concettuale di "retta" nella storia della matematica, si potrebbe pensare a una successione siffatta:

- $c_1$: retta primitiva: segmento di varie possibili lunghezze (le sue caratteristiche sono: l'esser dritto e sottile, e la sua indipendenza nominale dalla lunghezza); questa è anche l'idea ingenua di un bambino.
- $c_2$: retta euclidea: idealizzazione di $c_1$ [le sue caratteristiche sono: l'aver una sola dimensione (che è l'idealizzazione del "sottile") e l'essere allungabile (che è l'idealizzazione dell'indipendenza del nome dalla lunghezza)]; non molto chiara è la relazione tra punti e retta; nel senso pitagorico, il modello è quello delle perline (monadi) infilate nella collana (retta); ma in Euclide non c'è già più questa posizione ingenua che invece permane nello studente fino a 10–12 anni e talvolta oltre (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2010).
- $c_3$: retta densa: idealizzazione di $c_2$: tra due punti distinti qualsiasi ce n'è *sempre* un altro: il modello pitagorico è superato.
- $c_4$: retta continua (già ai tempi di Newton e Leibniz): sulla retta ci sono opportune sedi per punti corrispondenti a valori irrazionali algebrici ($\sqrt{2}$) e trascendenti ($\pi$) anche se non è ancora ben chiaro il loro statuto

epistemologico.

- $c_5$: retta di Hilbert (definita implicitamente dagli assiomi): non c'è più il tentativo di definizione esplicita per cercare di adeguare l'immagine di retta a un modello pre-fissato che si vuol raggiungere, ma si ha un'idealizzazione pura della concezione all'interno di un sistema teorico.
- $c_6$: retta come nome comune utilizzato indifferentemente in ambito euclideo e non: non si parla più di dimensione, di essere diritta, di essere infinita (però resta specificata la sua illimitatezza).
- $c_7$: denominazione di retta data a enti diversi di modelli diversi (retta finita o infinita, discreta, densa o continua, limitata o illimitata …).
- $c_8$: particolare oggetto ($n$–2)-dimensionale in una varietà $n$-dimensionale.
- …

Come si può decidere se e quali ulteriori $c_i$ seguiranno? L'oggetto $C$ "retta" è talvolta sovrapposizione e talaltra accumulazione delle concezioni precedenti; sembra che da $c_1$ a $c_5$ si possa parlare prevalentemente di passaggi di tipo "sovrapposizione", mentre da $c_6$ a $c_8$ sembra di essere di fronte prevalentemente a passaggi di tipo "accumulazione".

Esempio 2: *addizione*.

Delineiamo, in maniera approssimativa, una successione di concezioni provvisorie relativamente al supposto oggetto *addizione*. Consideriamo l'evoluzione del concetto di addizione nel corso della storia della matematica; si potrebbe pensare a una successione siffatta:

- $c_1$: addizione pitagorica (ordinale e cardinale confusi insieme) in N–{0}; l'addizione come cardinale di raccolte disgiunte; è la concezione ingenua di un bambino piccolo (è su questo punto che Vergnaud spiega alcuni dei suoi *teoremi in atto*).
- $c_2$: addizione in $Q_a$; stiamo pensando alle addizioni tra frazioni, nella storia sumera, egizia e poi greca.
- $c_3$: addizione in N e in $Q_a$ (0 compreso); nel corso del Medioevo, nel mondo indiano-arabo si rende necessario ampliare l'addizione a casi nei quali un addendo è lo zero.
- $c_4$: addizione in Z.
- $c_5$: addizione in Q.
- $c_6$: addizione in R.
- $c_7$: addizione nel campo complesso C.
- $c_8$: addizione nei quaternioni e, più in generale, nei sistemi complessi $n$-valenti; stiamo pensando alle ricerche di Hamilton, Grassmann, Frobenius e Hankel; alcune proprietà formali dell'addizione tipiche dei numeri N, Z,

Q e R si perdono, e tuttavia l'operazione che estende e generalizza l'addizione è ancora chiamata così.

- $c_9$: addizione generalizzata nei reticoli e nelle algebre di Boole.
- $c_{10}$: addizione generalizzata nelle strutture $<A, +, \times, 0, 1,...>$.
- …

Come si può decidere se e quali ulteriori $c_i$ seguiranno? L'oggetto matematico che denominiamo "addizione" è evoluto talvolta per sovrapposizione e talaltra per accumulazione delle concezioni precedenti; sembra che da $c_1$ a $c_7$ si possa parlare di passaggi prevalentemente di tipo "sovrapposizione", mentre da $c_8$ a $c_{10}$ sembra di essere di fronte a passaggi prevalentemente di tipo "accumulazione".

## 9. Alcune note critiche alla precedente posizione; oggetto, significato dell'oggetto, linguaggi

La visione delineata nel paragrafo 8, come ripetiamo, è solo uno schema che riassume le posizioni più diffuse, al riguardo. Vediamo ora alcune note critiche.

Una riflessione matura mostra che è essenziale l'attività delle singole persone messe di fronte alle problematiche che fanno scaturire dei $c_i$; in questo senso, una supposta scala gerarchica perde, a nostro avviso, di senso; per cui una maggior … nobiltà concettuale supposta per le $c_i$ di tipo $a$, rispetto a quelle di tipo $s$, svanisce.[10]

Gli "oggetti" emergono dall'attività delle persone messe di fronte alla risoluzione di problemi, addirittura indipendentemente da ogni contesto istituzionale; anzi, in un certo senso, privilegiando proprio i significati personali rispetto a quelli istituzionali. Tanto è vero che la cadenza di successioni precedenti potrebbero essere sì idonee a spiegare l'evoluzione all'interno della storia della matematica, ma non quella evolutiva specifica di una persona che apprende.

Da questo punto di vista, non sembra aver senso parlare, per esempio, dell'"oggetto retta" (o dell'"idea di retta", o del "concetto di retta") come normalmente si fa: siamo evidentemente piuttosto costretti a parlare di "pluralità di oggetti"; non tanto dunque si tratta di una "scalata" verso un vertice, quanto di una pluralità di "oggetti" *diversi*, che hanno banalmente in comune un nome proprio, il quale però non identifica una sola entità, come nella visione che abbiamo chiamato "teoria realista", bensì il cui significato

[10] Questo punto, se accettato, potrebbe avere forti ripercussioni nella pratica didattica; e, a nostro avviso, dovrebbe essere studiato non solo dal punto di vista teorico, com'è stato fatto fino a ora, nell'ambito della cosiddetta educazione matematica, ma anche dal punto di vista dell'azione pratica, nell'ambito della cosiddetta didattica della matematica (Godino & Batanero, 1998).

dipende dal conteso di uso, nella visione che abbiamo chiamato “teoria pragmatista”.

Dunque, ogni $c_i$ è, in questa ultima visione, un “oggetto retta” (probabilmente, a una più accurata analisi, si potrebbe scoprire che, in realtà, esso stesso è, a sua volta, una pluralità eccetera).

Ogni $c_i$ è il risultato di un rapporto personale all’oggetto, ma, come abbiamo visto in Chevallard e da Godino e Batanero, *l’oggetto è questo stesso rapporto personale*, non un supposto “oggetto in sé”.

D’altra parte, lo stesso Wittgenstein insiste sul fatto che non si deve parlare di idee matematiche nel senso in cui, invece, si è soliti farlo, cioè come del risultato di un processo di astrazione, dato che questo è origine di gravi confusioni filosofiche, psicologiche (e didattiche). Il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* insiste nel parlare di diversità di uso, o di usi diversi del “termine” (“retta”, “addizione”, nei nostri esempi precedenti).

Nella posizione di Godino e Batanero, all’oggetto matematico $O$ si propone di associare l’entità teorica “significato di $O$” (in realtà una classe di significati): si passa così dall’accentuazione posta sul “concetto”, sulle sue definizioni e sulle regole d’uso, a una nuova accentuazione posta invece sui campi di problemi, di pratiche, di tecniche, dalle quali emergono queste entità intensionali.

I due casi da noi forniti, “retta” e “addizione”, dunque, costituiscono proprio un esempio della relatività degli oggetti $O$ che, a volte sono entità mentali (dunque personali, in quanto strettamente relazionate con l’individuo), a volte entità astratte (dunque istituzionali in quanto connesse ad una forma generale di interpretarle e di considerarle).

Ci pare di poter affermare che negli studi teorici di educazione matematica, nella ricerca in questo settore, nella pratica didattica, sia di fondamentale importanza identificare quali siano i problemi specifici, le attività pratiche, le attività tecniche, le relazioni fra i tre poli del triangolo della didattica (docente, allievo, Sapere) eccetera che, anche storicamente, hanno portato a far emergere ogni “concezione”, ogni “oggetto”, ogni “regola”.

Ci piace evidenziare la somma importanza di stabilire la reale o presunta dipendenza di tutte queste componenti dai contesti cosiddetti istituzionali (Godino & Batanero, 1994); potrebbero essere dipendenze di carattere storico, educativo, strumentale eccetera, o tutte queste allo stesso tempo.

## 10. Concetti e oggetti[11]

In matematica, l’acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l’acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche. Lo dice per primo Raymond Duval, presentando la problematica dei registri, nei celebri

[11] Per la redazione di questo paragrafo ci siamo serviti di D’Amore (2001c).

articoli del 1988 pubblicati sugli *Annales* (1988a, 1988b, 1988c) e del 1993 (Duval, 1993) che è una sintesi dei precedenti; ma Duval pubblica su questo argomento anche lavori nel 1989 e 1990; lo confermano Chevallard (1991), Godino e Batanero (1994). Per analisi assai più recenti si vedano Duval e Sáenz-Ludlow (2016) e D'Amore (2016). Questi studi ci consentono di fare alcune precisazioni terminologiche, considerazioni complementari e note cautelative.

10.1. A volte, in matematica, si parla di "concetti" a volte di "oggetti". Che differenza c'è? Potrebbe essere il risultato di un vezzo dei matematici, ma si tratta invece di un motivo ben fondato, dato che si basa sui seguenti tre punti:

- Ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti", dal punto di vista del realismo ingenuo; dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi.
- Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione;[12] dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che, per vari motivi, soprattutto se sono a carattere linguistico, non possono essere univoci: dunque, in matematica, non c'è accesso sensibile (vista, tatto, eccetera) diretto agli "oggetti" ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici; in questi casi, si fa spesso riferimento al "realismo ingenuo".[13]
- Si parla più spesso in matematica di "oggetti matematici" che non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano *preferibilmente* oggetti piuttosto che concetti: "la nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza" (Duval, 1998, p. 141).

[12] Qui "oggetto" è ingenuamente inteso nel senso di "oggetto reale" o di "cosa". Quale sia il significato di questa parola ("cosa") è espresso nella *Metafisica* di Aristotele, quando afferma che la "cosa", in quanto parte del reale, è ciò che presenta le tre caratteristiche seguenti: tridimensionalità; accessibilità sensoriale multipla (cioè di più sensi contemporaneamente) indipendente dalle rappresentazioni semiotiche; possibilità di separazione materiale e da altre parti della realtà, da altre "cose".

[13] "Realismo ingenuo" non è un termine "ingenuo" o di buon senso, ma si riferisce al *Naiven Realismus* così definito da Wilhelm Schuppe (1836 – 1913) (*Grundriss der Erkenntnistheorie und Logik*, 1894), cioè quello per cui si riconosce l'indipendenza dell'oggetto conosciuto dall'atto (psichico) attraverso il quale viene conosciuto. Questa idea ha riscontro in un famoso articolo di George Edward Moore (1873 – 1958) del 1903 (pubblicato in *Mind*, con il titolo: *La confutazione dell'idealismo*) che si ispira alla posizione di sir William Hamilton (1730 – 1803) (che però parla di *Realismo Naturale*) il quale attribuisce questo modo di pensare alla filosofia scozzese. Crediamo però che tutte queste posizioni possano rientrare nel Realismo empirico di Immanuel Kant (1724 – 1804).

10.2. Nel sentiero tracciato da Duval, la nozione di concetto, preliminare o comunque prioritaria in quasi tutti gli autori, diventa secondaria, mentre ciò che assume carattere di priorità è la coppia (*segno*, *oggetto*), il che porta al cosiddetto *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, evidenziato proprio da Duval (1993) e che presenteremo tra breve. In Duval (1996) si cita un passo di Vygotskij nel quale sostanzialmente si dichiara che non c'è concetto senza segno:

> Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici (...) L'elemento centrale [del processo di formazione dei concetti] è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici (...) (Vygotskij, 1934/1985, pp. 150–151, 157)

Se si pone l'accento sulla coppia (*segno*, *oggetto*), tutte le rappresentazioni triadiche (di C. S. Peirce, di G. Frege, di C. K. Ogden e I. A. Richards) possono essere tra loro unificate e le diversità sembrano svanire.[14] Nel "segno" confluiscono tutte le rappresentazioni iconiche e semiotiche che costituiscono un complesso e non più un unicum, il che permette una descrizione in tutte le direzione segniche possibili.

10.3. Riassumiamo parte di quanto già detto, interpretando Duval (1993), nel seguente schema:

- l'"oggetto" matematico da concettualizzare non esiste come oggetto reale;
- cioè presenta una oggettiva inaccessibilità alla percezione sensoriale;
- ne segue la necessità di far uso di rappresentazioni semiotiche;
- l'attività matematica dunque non avviene sugli oggetti ma sulle rappresentazioni;
- il che comporta il cosiddetto *paradosso cognitivo* del pensiero matematico.

Vediamo allora in che cosa consiste questo *paradosso cognitivo del pensiero matematico*, che ha forti ripercussioni cognitive:

> (…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni

[14] Si veda D'Amore (2001c) per una trattazione più completa.

> rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche. (Duval, 1993, p. 38; la traduzione è di B. D'Amore, concordata con l'autore)[15]

In questo paradosso, così ben evidenziato da Duval, si può nascondere una potenziale causa di mancate devoluzioni, come prova D'Amore (2001c). Il problema principale, per dirla qui brevemente, sta nel fatto che secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell'"oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all'"oggetto" e l'insegnante e la noosfera tendono a non separare oggetto e sua rappresentazione (l'insegnante cioè potrebbe confondere noetica e semiotica, e dunque nemmeno darsi conto del motivo delle difficoltà dello studente). Lo studente è come bloccato, cognitivamente inibito, distante dalla comprensione e dall'uso dell'oggetto: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. Il suo rapporto personale al sapere ha come "oggetto" qualche cosa di sfumato, di confuso, di limitato, riduttivo. E quindi, di fronte a un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", per dominare una situazione diversa, per esprimere altre componenti concettuali, lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché e accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli nemmeno comprende, lo accusano di una incapacità vaga, non circostanziata e dettagliata: nessuno sa *esattamente* che cosa, davvero, lo studente non sa o non sa fare.

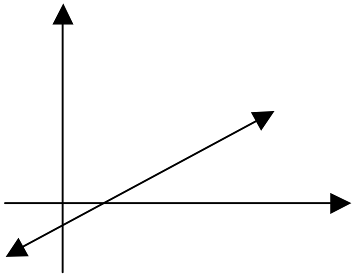
In questa fase paradossale, nessuno capisce più quel che sta accadendo in quanto ciascuno degli attori di questa avventura ha una percezione diversa del problema.

D'altra parte, l'analisi delle rappresentazioni è fatto nuovo, nello studio dei processi cognitivi, anche se lo è meno sul piano strettamente filosofico.

Si pensi al passaggio dal registro figurale a quello algebrico nella geometria analitica (Figura 3).

[15] Un'analisi storico-semiotico-filosofica di questo paradosso è stata recentemente pubblicata; si veda D'Amore, Fandino Pinilla, Iori e Matteuzzi (2015).

Da: a:



$x–2y–2=0$

*Figura 3.* Passaggio dal registro figurale a quello algebrico nella geometria analitica.

c'è un cambio di registro non banale da dominare per un allievo di 14–15 anni. In nessuno dei due casi si è di fronte all'"oggetto retta", ma ad una sua rappresentazione semiotica.

Come altro esempio, si pensi al passaggio dal registro decimale a quello figurale nella rappresentazione dei numeri: molti studenti di 11–12 anni trovano complesso rappresentare numeri decimali come 1,75 oppure come 1,8 sulla retta numerica razionale per il cambio di registro semiotico che non dominano; in un certo senso è questo cambio di registro che fa dire a qualcuno che 1,75 > 1,8 (e *infatti*: 75 > 8; qui si aggiunge anche un'interpretazione ambigua della scrittura decimale).

Più volte abbiamo usato il verbo "apprendere", difficile da definire, ma che riteniamo necessario almeno chiarire parzialmente.

Intenderemo con "apprendere" una costruzione più o meno personale, ma sottoposta al bisogno di "socializzare", il che avviene ovviamente grazie a un mezzo comunicativo (che può essere il linguaggio) e che nella matematica sempre più decisamente sarà condizionato dalla scelta del mediatore simbolico, cioè del registro semiotico di rappresentazione prescelto (o imposto, a vario titolo, anche solo dalle circostanze).

## 11. Semiotica e noetica nell'apprendimento della matematica

Prendiamo a prestito da Duval l'affermazione: *non c'è noetica senza semiotica*.

Tanto per chiarezza terminologica, ma senza alcuna pretesa di completezza, dato che non sempre questi termini sono usati nello stesso senso, preferiamo esplicitarne i significati dei quali ci serviremo:

*semiotica* $=_{\text{df}}$ rappresentazione realizzata per mezzo di segni

*noetica* $=_{\text{df}}$ acquisizione concettuale di un oggetto.[16]

Indicheremo, d'ora in poi:

[16] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

$r^m =_{df}$ registro semiotico ($m = 1, 2, 3, \ldots$)
$R^m{}_i(A) =_{df}$ rappresentazione semiotica $i$-esima ($i = 1, 2, 3, \ldots$) di un oggetto $A$ nel registro semiotico $r^m$.

Si può notare che, in base a queste scelte, se cambia il registro semiotico cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.

Ancora una volta, usiamo un altro schema per illustrare tutta la questione, perché ci sembra più incisivo ed efficace.[17]

- Consideriamo le tre caratteristiche della semiotica: *rappresentazione*, *trattamento* e *conversione* (che sono tre attività assai diverse fra loro dal punto di vista cognitivo).
- Abbiamo un oggetto matematico $A$ da *rappresentare*.
- Poiché non esiste un'unica rappresentazione in grado di fornire in un unico simbolo o segno tutte le componenti o tratti distintivi di $A$, il primo passo da compiere è decidere quali tratti distintivi vogliamo rappresentare e in quale registro semiotico farlo.
- Scegliamo il registro semiotico $\underline{r}^m$ e, in esso, la rappresentazione $R^m{}_i(A)$ di $A$.
- Grazie alla trasformazione di trattamento, possiamo passare alla rappresentazione $R^m{}_j(\underline{A})$ di $A$ ($i \neq j$).
- Grazie alla trasformazione di conversione, possiamo passare alla rappresentazione $R^n{}_h(A)$ di $A$ ($h \neq i$, $n \neq m$) ($m, n, i, h = 1, 2, 3, \ldots$).

Nella didattica della matematica, la conversione sembra occupare un posto centrale rispetto alle altre funzioni, e in particolare rispetto a quella di trattamento, considerata invece dai più come decisiva dal punto di vista matematico. (Su questo punto si vedano: D'Amore, 2007b, 2007c, 2011; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010, 2011).

La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare *più* registri di rappresentazioni semiotiche degli stessi concetti:

- di *rappresentarli* in un dato registro;
- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;
- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

L'insieme di questi tre elementi e le considerazioni precedenti mettono in evidenza il profondo legame che c'è tra noetica e costruttivismo, in quanto la "costruzione della conoscenza in matematica" può essere interpretata come l'unione di quelle tre "azioni" sui concetti, cioè l'espressione stessa della

[17] Facciamo ancora riferimento a Duval (1993).

capacità di:

- *rappresentare* gli oggetti matematici scegliendo i tratti distintivi che li caratterizzano o che si vogliono evidenziare;
- *trattare* le rappresentazioni ottenute all’interno di un registro stabilito; e
- *convertire* le rappresentazioni da un registro ad un altro.

È come se si stessero specificando le operazioni-base che, nel loro insieme, definiscono quella “costruzione” che, altrimenti, resta un termine misterioso ed ambiguo, disponibile ad ogni sorta di interpretazione, anche metafisica.[18]

La rinuncia dello studente alla devoluzione (ovviamente inconsapevole), l’incapacità dello studente di implicarsi (come risultato di esiti negativi nei casi di tentativi), assumendosi carico diretto e personale della responsabilità della costruzione della conoscenza, in ambiente scuola, sono legate all’incapacità (talvolta solo supposta) o di *rappresentare*, o di *trattare* o di *convertire*, a causa di una mancanza didattica specifica a monte. L’insegnante potrebbe infatti non preoccuparsi dei singoli componenti della costruzione a causa del fatto che egli considera identiche la semiotica e la noetica, il che spiega anche la difficoltà che ha l’insegnante di capire la difficoltà nella quale versa lo studente in difficoltà. Questa identità è molto diffusa nel pensiero di alcuni insegnanti, specie di quelli che non hanno mai avuto occasione di riflettere su questa questione, o che la considerano superflua.[19]

Ciò potrebbe portare alla scelta rinunciataria da parte dello studente e quindi alla scolarizzazione dei saperi (D’Amore, 1999b).[20]

A tutto quanto sopra bisogna aggiungere, secondo noi, un’altra questione.

Tra i registri semiotici disponibili per la matematica c’è il linguaggio comune, l’*everyday language*. Il linguaggio, per come lo ha conosciuto lo studente nei primi anni di scuola e per come lo usa in contesti non scolastici, ha varie e complesse funzioni:

---

[18] Naturalmente questa osservazione, ma anche tutto questo articolo, sono specifici per la matematica; non sappiamo valutare quanto siano estendibili a una teoria dei concetti o, addirittura, a una gnoseologia.

[19] Il che rimanda a un discorso assai più generale, quello sulle credenze implicite dell’insegnante, affrontato in modo profondo, sistematico e ricorrente, in Speranza (1997).

[20] “Con il termine ‘scolarizzazione del sapere’ intendiamo qui riferirci a quell’atto in larga misura inconsapevole, attraverso il quale l’allievo, a un certo punto della sua vita sociale e scolastica (ma quasi sempre nel corso della scuola elementare), delega alla Scuola (come istituzione) e all’insegnante di scuola (come rappresentante dell’istituzione) il compito di *selezionare per lui i saperi significativi* (quelli che lo sono socialmente, per status riconosciuto e legittimato della noosfera), rinunciando a farsi carico diretto della loro scelta in base a qualsiasi forma di criterio personale (gusto, interesse, motivazione eccetera). Poiché questa scolarizzazione comporta il riconoscimento dell’insegnante come depositario dei saperi che socialmente contano, è anche ovvio che vi è, più o meno contemporaneamente, una scolarizzazione dei rapporti interpersonali (tra studente e insegnante e tra studente e compagni) e del rapporto tra lo studente e il sapere: è quel che (…) si chiama ‘scolarizzazione delle relazioni’” (D’Amore, 1999b, p. 251).

- funzione di designazione,
- funzione di espressione di enunciati,
- funzione di espansione discorsiva,
- funzione di riflessività (o metalinguistica).

Tutte queste funzioni sono presenti nel complesso gioco relazionale che riguarda l'apprendimento della matematica, ma il più delle volte in modo non spontaneo, dato che lo studente adatta il proprio linguaggio matematico a quello che sente usare dall'insegnante, dal libro di testo, dai compagni che hanno successo nelle ore di matematica.

Dunque, si realizza questo paradosso: proprio l'uso di quel registro semiotico che dovrebbe essere il più naturale e spontaneo si rivela essere quello più complesso da gestire.

Il linguaggio "naturale" cessa di essere tale e diventa un registro specifico che sfugge alla capacità dello studente di gestirlo e di dominarlo. Lo studente finisce con il parlare una lingua innaturale, fatta di frasi fatte, sentite e non costruite, che non domina più (D'Amore & Sandri, 1996; Maier, 1993).

Innumerevoli sono gli studi sulle relazioni fra semiotica e pratica d'aula; noi ci limitiamo a segnalare solo quelli che ci sembrano più pertinenti e generali e più vicini al nostro modo di vedere: Radford e D'Amore (2006, 2017), D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013), Duval e Sáenz-Ludlow (2016).

Su un punto occorre tornare.

In più suoi scritti, Raymond Duval insiste sulla centralità della trasformazione semiotica di conversione, nei processi di rappresentazione e apprendimento della matematica, sottolineando come questa trasformazione crei ostacoli all'apprendimento. Ma la pratica scolare mostra che la questione non è così immediata. Per esempio, qualsiasi bambino di 8 anni è in grado di passare da una rappresentazione aritmetica dell'oggetto matematico "un mezzo" (1/2) a una rappresentazione geometrica (  ), mediante una conversione. Mentre quasi nessuno studente adulto accetta che $3n$ sia la somma di tre numeri naturali consecutivi, nonostante abbia egli stesso effettuato il trattamento: $(n–1)+n+(n+1) = 3n$. È come se il trattamento sia accettato come trasformazione, ma non si accetta che possa conservare il significato dell'oggetto matematico trattato. Questo punto che consideriamo centrale nell'attuale ricerca in didattica della matematica è stato a lungo studiato e in varie accezioni. (Si vedano, per esempio: D'Amore, 2007b, 2007c; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b; Rojas Garzón, 2014; Santi, 2010, 2011).

Per concludere questo paragrafo, raccomandiamo al lettore interessato alla prospettiva duvaliana i due lavori di Maura Iori (2015, 2017).

## 12. Un cenno alla teoria della oggettivazione

Rispetto alle posizioni delle origini, poi, gli studi semiotici si sono moltiplicati e hanno preso strade assai variegate. Fra tutte le posizioni emerse, di certo affascinante e ricca di suggestioni si è rivelata la teoria della oggettivazione studiata con molta profondità da Luis Radford. Essa evidenzia una dualità fra le teorie semiotico-cognitive (alla Duval) e le teorie semiotico-culturali.

La teoria della oggettivazione rientra appunto fra le teorie cosiddette semiotico-culturali; in generale, in esse si suppone che la conoscenza sia generata dagli individui nel corso di pratiche sociali costruite storicamente e culturalmente. La produzione di conoscenza dipende dunque da esigenze di adattamento sociale, in quanto essa è incorporata in forme culturali di pensiero, relazionate con una realtà simbolica e materiale che offre le basi per interpretare, comprendere e trasformare il mondo degli individui, i concetti e le idee che essi si formano a proposito di detta realtà. L’apprendimento è la realizzazione di una conoscenza culturalmente oggettiva che gli studenti ottengono attraverso un processo sociale di oggettivazione mediato per mezzo di segni, linguaggi, artefatti e interazioni sociali, quando gli studenti si impegnano in forme culturali di riflessione e di azione.

Rispetto ai paradigmi precedenti, quello delle teorie socioculturali è una vera e propria rottura; si tratta infatti di interpretare in forma decisamente nuova le idee di conoscenza e sapere. Secondo le teorie socioculturali, il concetto di adattamento come forma di apprendimento non è sufficiente per intendere nel profondo l’idea di produzione di conoscenza o di appropriazione di conoscenza (l’apprendimento). Secondo queste teorie la conoscenza non è il risultato di strutture di carattere epistemico che trascendono la cultura, ma è essa stessa una forma culturale, costituita da riflessioni e azioni incorporate nelle stesse pratiche sociali, con la mediazione del linguaggio, dovuta all’interazione sociale, grazie all’uso di segni e alla creazione di opportuni artefatti (Radford, 2011).

La teoria dell’oggettivazione, in particolare, si basa sull’idea considerata fondamentale che l’apprendimento è allo stesso tempo conoscere e divenire, cioè non può essere circoscritto al solo ambito della conoscenza ma deve affrontare l’ambito dell’essere, quello specifico dei soggetti. Lo scopo dell’educazione matematica è uno sforzo dinamico, politico, sociale, storico che spinge i soggetti riflessivi ed etici alla creazione dialettica relativamente a discorsi tematici e pratiche di carattere matematico che si costituiscono storicamente e culturalmente, discorsi e pratiche che sono in continua evoluzione. Le basi filosofiche di questa posizione possono essere rintracciate nei lavori del filosofo tedesco Georg Wilhelm Friedrich Hegel e nei successivi sviluppi dovuti a Karl Marx e a tutta la tradizione cosiddetta dialettica, Evald Ilyenkov, Boris Mikhailov, Lev Semënovič Vygotskij, per esempio. (Si vedano: D’Amore, 2015, 2017, in corso di stampa; D’Amore & Radford, 2017; Radford, 2003, 2005a, 2005b, 2006a, 2006b, 2011).

La teoria della oggettivazione, come abbiamo detto, si contrappone a precedenti teorie, per esempio alla teoria delle situazioni (Brousseau, 1986, 1997). (Si vedano, per esempio: D'Amore, Radford, & Bagni, 2006; Radford, 2017). Su questo punto sorvoliamo, anche se, in più occasioni, abbiamo insistito al contrario sulla possibilità di comparazione fra queste due teorie, in luogo della loro opposizione (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008a, 2008b); ne abbiamo fatto cenno in vari studi e ci ripromettiamo di entrare più a fondo in forma costruttiva in un immediato futuro, in occasione di un articolo specifico. Più in generale, noi siamo assai più propensi a trovare analogie e comparazioni positive fra teorie che non opposizioni inconciliabili.

## 13. Il contributo della sociologia all'analisi comparata di alcuni strumenti elaborati dalla didattica della matematica

Il momento in cui si incontrano insegnante e allievo in un determinato ambiente, per discutere intorno a un sapere da costruire e relativo a ciò che, attraverso determinate scelte, è stato stabilito dall'istituzione, dall'insegnante, dalla noosfera e intorno a un sapere che fa parte del mondo esterno alla scuola, si caratterizza per le relazioni interpersonali che si instaurano.

Lo studio dei fenomeni di carattere sociale che avvengono nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica costituisce una linea di ricerca di crescente sviluppo in educazione matematica. Si integrano in questo modo le ricerche di carattere cognitivo che centrano la loro attenzione principalmente nell'apprendimento del soggetto individuale.

Lo studio delle funzioni legate alle interazioni sociali nella classe e della loro dipendenza da altri fattori esterni (culturali, politici eccetera) è stato affrontato da diverse impostazioni e usando strumentazioni teoriche differenti (si vedano: Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, Font, & Godino, 2008).

In particolare, accanto a un'analisi delle norme sociali che regolano in generale le interazioni tra insegnante e allievi (Godino & Llinares, 2000; Lerman, 2000; Sierpinska & Lerman, 1996), la ricerca sociologica applicata alla didattica ha individuato norme socio-matematiche che sono specifiche dell'attività matematica degli studenti. Esse regolano le argomentazioni matematiche e influiscono sulle opportunità di apprendimento, stabilendo per esempio ciò che si può considerare "matematicamente diverso", "matematicamente sofisticato", "matematicamente efficiente" e "matematicamente elegante", così come ciò che si può considerare come una spiegazione matematicamente accettabile. Metodologicamente, tanto le norme sociali generali, quanto le norme socio-matematiche si creano nell'identificare regolarità (o rotture) nei modelli di interazione sociale. Hanno frequentemente un carattere "meta" dal momento che si riferiscono ad altre pratiche matematiche (giustificare, spiegare, operare eccetera).

In D'Amore, Font e Godino (2008) viene messo in evidenza come la classe di matematica costituisce una micro-società in cui ha luogo la costruzione e la diffusione della conoscenza matematica attraverso le interazioni sociali tra gli studenti e il docente. Di conseguenza, l'apprendimento matematico è condizionato da diverse metaconoscenze matematiche e didattiche. In questo articolo gli autori fanno un esame delle nozioni teoriche usate per lo studio delle norme che regolano la costruzione sociale della conoscenza matematica nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, usando alcune idee dell'approccio ontosemiotico della conoscenza e dell'istruzione matematica.

Un contributo ulteriore alla comprensione dell'apprendimento della matematica è fornito dall'approccio micro-sociologico proposto da D'Amore (2005), secondo il quale la classe è una società specifica di individui la cui unità sociale è garantita da un insieme di pratiche definite e condivise.

La classe, di fatto, risponde ai requisiti tipici che i sociologi esigono da un gruppo di individui per poter usare la denominazione di "società" (Robertson, 1977, p. 83). Tali requisiti sono: tali individui occupano un "territorio" comune (l'aula, la scuola); interagiscono fra di loro; sanno che appartengono allo stesso gruppo; hanno, almeno in parte, una cultura comune (o, per lo meno, questo è ciò che si suppone all'origine).

La classe può essere intesa, dunque, come una *comunità di pratiche* condivise (D'Amore, 2005; Godino & Batanero, 1994; Radford, 1997) che ha come scopo la costruzione di conoscenza (nel nostro caso: conoscenza matematica).

Ogni società determina le sue specifiche pratiche, alcune originate dagli scopi costitutivi delle società (a volte astratti), altri all'adattamento al fatto stesso di questa appartenenza. Dunque, queste "pratiche" si possono dividere in due grandi categorie: (1) quelle stabilite a priori da tale società (l'apprendere, il condividere attività eccetera); (2) quelle che nascono a causa del fine che tali attività si prefiggono di ottenere (la competitività, le azioni relative al contratto didattico, quelle tese a far supporre a chi deve valutare abilità di fatto non possedute eccetera).

Le prime sono pratiche codificate e dunque *funzionali* (Robertson, 1977); sono quelle che danno un significato alla costituzione stessa di tale società; le seconde, che in D'Amore (2005) sono definite *meta-pratiche*, sono dovute alla specifica situazione, e sono dunque a carattere extra funzionale. La tipologia delle pratiche deviate è diversa, rispetto a quella descritta in precedenza.

Tra le altre, abbiamo pratiche che permettono di giungere ai risultati desiderati utilizzando metodi non appropriati (per esempio, di fronte a un problema che chiede che giorno della settimana sarà il 30 gennaio 2030 con l'obiettivo di mettere in funzione l'algebra modulare, l'alunno risponde utilizzando un calendario che ha trovato in internet) oppure pratiche che chiaramente violano norme e metanorme del contratto didattico (per esempio, quando l'allievo copia il lavoro di un compagno, sta rinunciando a esser protagonista della costruzione della propria conoscenza).

Le due tipologie di pratiche sono condizionate da prospettive diverse. Per esempio, all'interno della stessa classe, alcuni studenti hanno come obiettivo apprendere ciò che si è stabilito a priori come conoscenza da acquisire (significati istituzionali) (Godino & Batanero, 1994), per altri l'obiettivo è apprendere a influire nel giudizio che avrà chi valuta (questo fatto non è tipico solo delle classi dei primi livello scolastici, ma di tutti i livelli, inclusa l'università e il postgrado; d'altra parte, esso è spesso è l'obiettivo principale di tutti, di natura generale: sociale, culturale, politica, economica ...).

In una classe generalmente non c'è condivisione totale degli scopi; dunque, come ci spiega la sociologia l'unitarietà del gruppo si perde ed essa tende a divenire un "gruppo secondario" in cui alcuni soggetti privilegiano le pratiche funzionali ed altri le metapratiche.

Tra gli studenti di una stessa classe, alcuni accettano le attività e gli obiettivi di apprendimento proposti dal docente come rappresentante di un'istituzione di riferimento e cercano di appropriarsi dei significati proposti.

Altri gruppi di studenti non assumono pienamente tali obiettivi e significati, o per carenze nelle necessarie conoscenze precedenti, o per inadattabilità ai compromessi scolastici. Il fatto che l'istruzione produca abilità e valori, come la trasmissione sistematica e formalizzata di conoscenze, dovrebbe portare alla realizzazione di determinate pratiche funzionali. Ma, dal momento che tale sistematicità e formalizzazione sono burocratizzate in un sistema sociale che prevede un'evoluzione, si determina automaticamente la necessità, in parte dei soggetti implicati, di realizzare determinate pratiche deviate come adattamento alla società-classe.

Ad esempio, le molteplici attività degli studenti tese ad interpretare le attese dell'insegnante nei loro confronti, rientrano nelle metapratiche.

L'esistenza di questo fenomeno fu segnalata come *contratto didattico* già negli anni '70 da Guy Brousseau (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010).

È innegabile che questa attività sia quella che in sociologia si chiama una metapratica diffusa tra gli studenti; essa non rientra tra le pratiche del processo di insegnamento-apprendimento che costituiscono un senso alla società classe, ma piuttosto tra quelle dell'adattamento a tale società da parte dell'individuo.

Queste considerazioni a carattere sociologico spiegano bene una vasta classe di difficoltà degli studenti nell'apprendimento della matematica e nella pratica d'aula, quando l'argomento è la matematica (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi, & Sbaragli, 2009). L'attenzione dello studente, il suo sforzo, si sposta da quelle che potrebbero essere definite le attività caratteristiche funzionali del gruppo classe e si trasformano in metapratiche che non hanno alcun valore nell'apprendimento, anzi lo bloccano e lo disorientano. L'insegnante può accorgersi che c'è una difficoltà, ma potrebbe non capire quale ne sia l’origine. Uno studio concreto, anche ricco di esempi, in questo settore di difficoltà potrebbe dunque essere di grande aiuto all’insegnante per capire che cosa sta succedendo in aula.

La nozione di comunità di pratica consente inoltre di affrontare la questione del significato degli oggetti matematici (D’Amore, 2003; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2001; Radford, 2005a), e di interpretare la mancata devoluzione come l’insorgere di metapratiche che inducono nell’allievo comportamenti devianti rispetto all’obiettivo di apprendere consapevolmente la matematica.

## 14. Ricerche sulla metacognizione sociale e individuale in didattica della matematica

L’uso che si fa in questo lavoro del prefisso “meta”, applicato alle pratiche, ci porta a esplorare le ricerche didattiche che si sono interessate della dimensione “meta” (metacognizione e metaconoscenza), in particolare il lavoro di Robert e Robinet (1996).

La metacognizione gioca un ruolo importante nella concettualizzazione della matematica. Robert e Robinet (1996) hanno condotto ricerche in una prospettiva interazionista, analizzando come si articola il *discorso sulla matematica* nelle pratiche d’aula**.** Per questi autori il prefisso “meta” si articola come:

- metacognizione riferita alla conoscenza che ha un soggetto dei suoi propri processi di risoluzione di problemi (controllo, supervisione, valutazione, …);
- metaconoscenze riferite a conoscenze potenziali di un soggetto (un allievo o un programmatore di curricoli) sull’apprendimento, sulla costruzione di conoscenze, cioè i metodi (specialmente scientifici), o sulla propria conoscenza: l’accento si pone sui contenuti più che sulla conoscenza che ha il soggetto di essi.

Le considerazioni che abbiamo svolto fino a questo punto mostrano che le conoscenze matematiche e didattiche sono oggetto di riflessione, classificazione e valutazione da parte di coloro che intervengono nella relazione didattica, dando luogo a nuove conoscenze di secondo ordine, o metaconoscenze. È possibile condurre un’analisi degli aspetti trattati sopra in chiave ontosemiotica (D’Amore, Font, & Godino, 2008), adattando in termini sociologici la nozione di “gioco di linguaggio”. Riteniamo che non sia possibile analizzare un processo di istruzione senza comprendere, detto con le parole di Wittgenstein (1953), le “regole del gioco di linguaggio” nel quale esso si sviluppa. In altre parole, il sistema di norme che regolano il funzionamento dei processi di insegnamento e apprendimento di un contenuto matematico specifico in un determinato contesto istituzionale.

Un ulteriore contributo fornito dalla sociologia alla didattica della matematica riguarda il problema del cambio o della perdita di senso degli oggetti matematici dovuto al passaggio tra loro rappresentazioni semiotiche (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, 2007b). In questo ambito della ricerca in didattica, il connubio tra semiotica e approcci di tipo sociale e culturale ha portato risultati nella comprensione dei processi di apprendimento della matematica (Radford, 2005a, 2005b).

Queste ricerche mostrano che il significato degli oggetti matematici non è una relazione convenzionale tra segni ed entità matematiche ideali, che condurrebbe a considerare le diverse rappresentazioni semiotiche equisignificanti. Gli oggetti matematici sono piuttosto simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (D'Amore, 2003).

Anche le forme di mediazione semiotica attraverso le quali avviene l'apprendimento degli oggetti matematici sono culturalmente e socialmente costruite. Nella prospettiva semiotico-culturale di Radford (2005a), l'apprendimento concettuale si produce, dunque, nel luogo d'incontro tra la soggettività dell'allievo, i mezzi di oggettivazione socialmente costruiti e un sistema socio-culturale di significazioni. L'analisi puramente semiotico-strutturale non è dunque sufficiente per spiegare i cambi di senso dovuti a cambi di rappresentazione. Occorre analizzare, a un livello micro-sociale e storico-culturale, il sistema di pratiche legate agli oggetti matematici e alle diverse rappresentazioni semiotiche in gioco, e la loro evoluzione "metapratica" che porta a comportamenti interpretativi esclusivamente locali e personali. (Su questo tema, si vedano: D'Amore, Font e Godino, 2007a, 2007b, 2008).

## 15. Conclusione

Un tentativo di analisi anche sommaria dell'idea che, a nostro avviso, sta alla base di tutte le teorie dell'attuale didattica della matematica, e cioè quella relativa alla natura degli oggetti della matematica, come abbiamo visto, non cessa di stupire per la sua complessità multiforme. Si passa rapidamente da analisi di tipo epistemologico (o, se si vuole, filosofico) e linguistico, a necessarie rassegne che evidenziano le posizioni critiche dei diversi autori.

Anche quando sembra che una tal teoria non prenda in esame questo specifico problema, in realtà lo fa, in forma più o meno esplicita, più o meno consapevole, più o meno profonda.

Di conseguenza, la bibliografia non può che essere multiforme e varia; noi siamo sempre sbalorditi di fronte al fatto che, a solo mezzo secolo o poco più dalla nascita della didattica della matematica, vi siano molte migliaia di citazioni possibili sugli stessi temi e posizioni così diverse, a volte radicalmente diverse. Nonostante tutto ciò, la nostra tendenza spontanea inclina maggiormente verso le ipotesi di confronto e almeno parziale unificazione, piuttosto che verso separazioni inconciliabili.

## Ringraziamenti

Gli autori esprimono i più sinceri e profondi ringraziamenti alla PhD Maura Iori, attenta e critica lettrice di una prima versione di questo testo; le sue acute e profonde analisi e i relativi suggerimenti di modifica hanno permesso un'opportuna e chiarificatrice revisione del testo in alcuni punti chiave.

## Riferimenti bibliografici

Abbagnano, N. (1971). *Dizionario di filosofia*. Torino: Utet.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti: Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico*. Trento: Erickson. [Traduz. in lingua spagnola: Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotà: Magisterio].

Astolfi, J. P., & Develay, M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. IREM de Lyon: LIRDIS.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: La prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 73–89.

Bara, B. G. (1990). *Scienza cognitiva: Un approccio evolutivo alla simulazione della mente*. Torino: Bollati Boringhieri.

Bloor, D. (1982). *Sociologie de la logique ou les limites de l'épistémologie*. Paris: Pandore.

Brousseau, G. (1981). Address of members of the G.R.D.M (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(1), 130–135.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist, 19*(1), 1–15.

Centro di studi filosofici di Gallarate (Ed.). (1957). *Enciclopedia filosofica*. Firenze: G. C. Sansoni.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble* (pp. 103–117). Grenoble: LSD2-Imag, Université Joseph Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématique, 12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Clary, M., & Genin, C. (1991). *Enseigner l'histoire à l'école*? Paris: Hachette-Istra.

Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Centre

National de Documentation Pédagogique-Hachette éducation.

D'Amore, B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Traduz. in lingua portoghese: D'Amore, B. (2007). *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física].

D'Amore, B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: Effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22A*(3), 247–276.

D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: La posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 4–30.

D'Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica, 15*(2), 150–173.

D'Amore, B. (2001c). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 38*(2), 143–168.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México DF: Reverté-Relime].

D'Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matemática interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325–336.

D'Amore, B. (2006a). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 177–195.

D'Amore, B. (2006b). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 301–306.

D'Amore, B. (2006c). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2007a). Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, *20*(28), 179–205.

D'Amore, B. (2007b). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects. In E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education: Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education)* (pp. 77–82). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007c). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23–45.

D'Amore, B. (2008). Epistemology, didactics of mathematics and teaching practices.

*Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(1), 1–22.

D'Amore, B. (2011). La ricerca in didattica della matematica: Un esempio di ricerca: Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *34B*(3), 255–266.

D'Amore, B. (2012). El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: La posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". In D. I. Calderón (Ed.), *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*. Énfasis: Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación (Vol. 6, pp. 17–46). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/archive_epistemologica_special/201509

D'Amore, B. (2016). Una reflexión sobre los textos de Raymond Duval aquí presentados. In R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 237–254). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalle ricerche alle pratiche d'aula*, *1*(1), 4–20.

D'Amore, B. (in corso di stampa). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación: Objetivación, saber y ontología, conocer y gnoseología, labor, semántica, comunicación. *Atti del Segundo Coloquio Internacional de la Teoría de la Objectivación*, Toronto, 17–20 gennaio 2017. *PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática*.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. In A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (pp. 111–130). Nicosia, Cipro: Intercollege.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica, 21*(1), 87–92.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*. Disponibile da www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008a). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education: Proceedings of the Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (pp. 13–22). Nicosia: University of Cyprus.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008b). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and shaping the world of mathematics* education (pp. 304–305). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana – Collana Scienza e Filosofia.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico* (pp. 1–17). Granada, 23–26 marzo 2017. Disponibile da http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica: La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora. [Traduz. in lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio]. [Traduz. in lingua portoghese: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica: Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Sao Paolo: Editora Livraria da Física].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2009). Il ruolo dell'epistemologia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *32B*(2), 171–192.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del contratto*. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2011). Some relations between semiotics and didactic of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *11*(1–2), 35–57. [Questo articolo è apparso anche in: E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.). (2012). *Research on Mathematical Education and Mathematics Applications: Proceedings of the 2nd International Conference of Universities of Five Cities (Rhodes, Nicosia, Palermo, Bologna and Locarno)* (pp. 139–158). Rhodes: Department of Education, University of Aegean].

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007a). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma 28*(2), 49–77.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007b). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics, 27*(2), 2–7, 14.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *22*(2), 207–235.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2010). Representations in mathematics education: An onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in*

*Mathematics Education, 2*(1), 58–86.

D’Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(19), 9–38.

D’Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 10*(2), 191–218.

D’Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D’Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B*(1), 11–40.

D’Amore, B., & Sandri, P. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81–97.

D’Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica, 19*(2), 139–163.

Dewey, J. (1961). *Come pensiamo*. Firenze: La Nuova Italia. [Lavoro originale: Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: Heath].

Dummett, A. A. E. (1991). ¿Qué es una teoría del significado? In L. M. Valdés Villanueva (Ed.), *La búsqueda del significado* (pp. 370–409). Madrid: Tecnos.

Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349–382.

Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Routledge-Falmer.

Fanfani, P. (1855). *Vocabolario della lingua italiana*. Firenze: Le Monnier.

Gagné, R. M. (1965). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Gal’perin, P. Ja. (1977). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino. In M. S. Veggetti (Ed.), *La formazione dei concetti: Sviluppo mentale e apprendimento* (pp. 43–63). Firenze: Giunti-Barbera. [Lavoro originale: Gal’perin, P. Ja. (1969). Stages in the development of mental acts. In M. Cole & I. Maltzman, *A handbook of contemporary Soviet psychology* (pp. 249–273). New York: Basic Books].

Giordan, A., & De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir: Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2–3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in mathematics education: A meta-analysis of three investigations. In N. A. Malara (Ed.), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline: Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996* (pp. 13–22). Modena: CNR-MURST-University of Modena.

Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática, 12*(1), 70–92.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di Dottorato). Università di Palermo, Italia. Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm

Iori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291. doi: 10.1007/s10649-016-9726-3

Istituto Giovanni Treccani (Ed.). (1929). *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti*. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Klausmeier, H. J. (1979). Un modello per l'apprendimento dei concetti. In C. Pontecorvo & P. Guidoni (Eds.), *Scienze e scuola di base: Problemi di didattica delle scienze* (pp. 67–81). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da G. Treccani.

Klausmeier, H. J. (1980). *Learning and teaching concepts: A strategy for testing applications of theory*. New York: Academic Press.

Klausmeier, H. J., Gathala, E. S., & Frayer, D. A. (1974). *Conceptual learning and development*. New York: Academic Press.

Kutschera, F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Lalande, A. (1926). *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Paris: PUF.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19–44). Westport: Ablex.

Lurija, A. R. (1982). *Language and cognition*. Washington, DC: V. H. Winston.

Maier, H. (1993). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques, 13*(3), 86–118.

Meirieu, P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment*? Paris: ESF.

Melzi, G. B. (Ed.). (1928). *Dizionario italiano completo*. Milano: Vallardi.

Nelson, K. (1974). Concept, word and sentence: Interrelations in acquisition and development. *Psychological Review, 81*(4), 267–285.

Nelson, K. (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In R. S. Anderson, R. J. Spiro, & W. E. Montague (Eds.), *Schooling and the acquisition of knowledge* (pp. 215–253). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*.

Paris: Presses Universitaires de France.

Pontecorvo, C. (Ed.). (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento*. Torino: Loescher.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165–178.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2005a). Body, tool, and symbol: Semiotic reflections on cognition. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (p. 111–117). Edmonton: CMESG.

Radford, L. (2005b). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 191–213.

Radford, L. (2006a). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 39–65.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 103–129.

Radford, L. (2008a). *Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences* (Working paper). ICME 11, Survey Team 7: *The notion and role of theory in mathematics education research*.

Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 317–327.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docente: Intervenció, innovació, investigación* (pp. 33–49). Girona: Documenta Universitaria.

Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. In B. D'Amore & L. Radford (2017), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 135–163). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. México: Cinvestav.

Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(2), 145–176.

Robertson, I. (1977). *Sociology*. New York: Worth Publishers.

Rojas Garzón, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. Bogotá: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [Libro tratto dalla omonima tesi di dottorato di ricerca, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Direttore: Bruno D'Amore].

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesi di dottorato, Direttore: Bruno D'Amore). Università di Palermo. Disponibile da www.dm.unibo.it/rsddm

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2–3), 285–311.

Santi, G., & Sbaragli, S. (2007). Semiotic representations, "avoidable" and "unavoidable" misconceptions [Special Issue]. *La matematica e la sua didattica, Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF "Mathematics and its Applications", 21*(1), 105–110.

Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche: Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 26*(50), 69–76.

Sbaragli, S., & Mammarella I. C. (2010). L'apprendimento della geometria. In D. Lucangeli & I. C. Mammarella (Eds.), *Psicologia della cognizione numerica: Approcci teorici, valutazione e* intervento (pp. 107–135). Milano: Franco Angeli.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 24–36.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemology of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.

Tornatore, L. (1974). *Educazione e conoscenza*. Torino: Loescher.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2–3), 133–170.

Vergnaud, G. (2017). Due riflessioni sull'attività in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *25*(1), 7–12.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and language*. Cambridge: MIT Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).

Vygotskij, L. S. (1981). *The development of higher forms of attention in childhood*. In J. V. Werscht (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 189–240). Armonk, NY: Sharpe. (Lavoro originale pubblicato nel 1960).

Vygotskij, L. S. (1985). *Pensée et langage* (F. Séve, Trad. fr.). Paris: Messidor Editions sociales. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: Ricerche psicologiche* (L. Mecacci, Trad. it.). Bari: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations.* New York: Macmillan.

Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Zingarelli, N. (1994). *Lo Zingarelli 1995: Vocabolario della lingua italiana* (12. ed., 1. ed. 1922). Bologna: Zanichelli.

# Teaching learning projects and didactical engineering

**Colette Laborde**
*Cabrilog*

**Abstract.** *Since a long time, long-term teaching projects have been developed in several countries for improving the learning of mathematics. In the eighties, the concept of didactical engineering emerged in France as a method of designing and evaluating teaching learning projects. This paper examines the historical roots of this method and presents its specific features. It also evokes the extension and transformation of this method in a more recent past.*

*Keywords:* teaching learning projects, didactical engineering, dialectic between theory and empirical investigations, problem situations.

**Sunto.** *Da tempo, in diversi Paesi sono stati sviluppati progetti di insegnamento a lungo termine per migliorare l'apprendimento della matematica. Negli anni ottanta, il concetto di ingegneria didattica è emerso in Francia come un metodo per la progettazione e valutazione di progetti di insegnamento-apprendimento. Questo articolo esamina le radici storiche di questo metodo e presenta le sue caratteristiche specifiche. Vengono anche evocate l'estensione e la trasformazione di questo metodo in un passato più recente.*

*Parole chiave:* progetti di insegnamento-apprendimento, ingegneria didattica, dialettica fra teoria e ricerche empiriche, situazioni problema.

**Resumen**. *Desde hace tiempo, en diversos países se desarrollaron proyectos de enseñanza a largo termino para mejorar el aprendizaje de la matemática. En los años ochenta, el concepto de ingeniería didáctica emergió en Francia como un método para el diseño y la evaluación de proyectos de enseñanza-aprendizaje. Este artículo examina las raíces históricas de este método y presenta sus características específicas. Son también evocadas la extensión y la transformación de este método en un pasado más reciente.*

*Palabras clave:* proyectos de enseñanza-aprendizaje, ingeniería didáctica, dialéctica entre teoría e investigaciones empíricas, situaciones problemas.

## 1. Introduction

For many years, mathematics curricula as well as numerous innovative sometimes long-term teaching projects in mathematics education have been designed with the intention to improve the learning of mathematics by students. Such projects occurred in several countries long before a specific scientific research in didactics of mathematics was established.

At the beginning of the 80's, after about 10 years of implementing scientific research in didactics, the French community of research introduced the idea of didactical engineering. Some researchers as Chevallard (Artigue, 1990) urged the community to eventually cope with theorizing the critical and complex real object of didactics of mathematics, i.e. the actual functioning of the didactical system, or in other terms the functioning of teaching sequences in classrooms with real students and real teachers.

This idea of didactical engineering introduced a new dimension, with respect to the attempts of designing curricula and innovative teaching projects, a dialectical relationship between theory and practice: "Con questa dizione si intende lo studio condotto in modo scientifico (quanto meno razionale) del fenomeno didattico; la messa in evidenza di una realizzazione didattica concreta, come attività di ricerca per verificare le costruzioni teoriche" (D'Amore, 1999, p. 228). As such, the method of didactical engineering may seem to constitute a break with the past design of teaching projects. However, its roots can be found in the reforms of the French teaching of mathematics from the very beginning of the XX century. This paper intends to present these roots and to show how seeds of what constitutes the essence of didactical engineering can be found in projects developed in France before the official birth of this concept. It also sketches how didactical engineering changed over the time under the questions coming from its use.

## 2. The New Math reform in France

France shares with Italy the fact that the teaching of mathematics and the design of curricula in mathematics have drawn the attention of many members of the *noosphere*, "the 'sphere' of those who 'think' about teaching (...) who share an interest in the teaching system, and who 'act out' their impulses in some way or another" (Chevallard, 1991). Those members in France were from various origins: university mathematicians, leaders of the association of mathematics teachers (APMEP, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), persons in charge of controlling the content to be taught like state inspectors of mathematics teaching and, after 1969, members of the IREMs (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, created after 1968 in particular at the strong request of the mathematics teacher association).

Among these members of the noosphere, mathematicians played a decisive role. Artigue (1998) gives two examples of reforms done in France at the initiative of mathematicians: the reform of 1902 and the New Math reform that affected also a wide range of countries across the world, in particular Italy:

> L'Italie a été l'un des pays d'Europe dans lesquels la connaissance des orientations de renouvellement de la vision culturelle des mathématiques soutenues par Choquet, Dieudonné et Lichnerowicz s'est répandue en profondeur dès les années 50 dans les milieux académiques et parmi les enseignants les plus

engagés. (Boero, 1994, p. 18)

In the ’50s the mathematics program of studies for middle and secondary schools (enseignement secondaire, 11- to 18-year-old students) appeared in several countries as obsolete and inadequate with respect to the scientific and technical progress of the society, according to members of the noosphere from various origins.

The mathematicians involved in the reform were probably also influenced by the prominent place of structuralism in various domains of scholarly knowledge, such as psychology, linguistics, and of course mathematics, deeply marked by the French Bourbaki movement. The same strong hypothesis about learning prevailed in France and in Italy: The contents of teaching could not give a chance to students to really understand them because they were mathematically unfounded.

The mathematical content to be taught was deeply changed under the umbrella of structuralism without really taking into consideration its impact on the actual everyday teaching in classroom and on learning processes. In the case of geometry, a new organization was proposed in particular by the French mathematician Choquet (1964), aiming at finding the best set of axioms for a presentation providing a logic sequencing of the contents appropriate for secondary mathematics. In particular, a choice had to be done between a light system of axioms and a heavier set. A heavier set avoids a long and tedious path to theorems whereas a light system minimized what had to be accepted. Such a proposal of reorganization of geometry was based primarily only on the block of knowledge in terms of a praxeological approach. It was proposed as an example for future curricula and certainly affected the design of the New Math program of studies in France. One can recognize in this enterprise the concentration on the pure mathematical content and the wish to give a better foundation to the mathematical contents before embedding them into a curriculum.

## 3. The reactions to the New Math reform

However, simultaneously to the structuralist movement, other ideas emerged, in particular through the CIEAEM (Commission Internationale pour l’Etude et l’Amélioration de l’Enseignement des Mathématiques). Founded by Caleb Gattegno, it managed to mobilize people from various background, as for example, the psychologist Piaget, the philosopher Gonseth, the mathematicians Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet, and the teachers Emma Castelnuovo, Lucienne Félix, and Willy Servais (Furinghetti, Menghini, Arzarello, & Giacardi, 2008). Actually, the CIEAEM had a twofold influence on the teaching of mathematics:

- the one favoring the structuralism, expressed in CIEAEM first book

(Piaget et al., 1955) by Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet, and Piaget, who linked the structures of the mind with mathematical structures;
- and the other more focused on the practice in classroom and on the use of concrete and semi-concrete material, as expressed in the second book of the commission (Gattegno et al., 1958).

According to Furinghetti et al. (2008) this second book "comprises educational ideas and features that are still under discussion: computer, embodied cognition, gestures". (About embodied cognition and gestures, see: Arzarello & Robutti, 2008; Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009). One may also read a recent interesting discussion of some aspects introduced by CIEAEM in D'Amore and Fandiño Pinilla (2017) in which they review some illusory methodological proposals for mathematics education done in the past.

Some mathematicians also reacted. Freudenthal (1958, p. 7) criticized the "anti-didactic inversion introduced by the axiomatic in geometry" (Furinghetti et al., 2008) and supported the work done in geometry by Mr. and Mrs. Van Hiele in Nederland. Later, the French mathematician Thom (1973) claimed that the focus should be more on meaning than on rigor and that eliminating geometry in favor of algebra has eliminated the link between natural language and abstraction. Some good projects for renewing the mathematics teaching were carried out in Italy under the guidance of mathematicians, who were interested in mathematics teaching (Furinghetti, 2006).

In France, at the end of the '60s and in the '70s, the French association of the mathematics teachers (APMEP) reacted by proposing a deep change in schools avoiding abstraction in the teaching. The commitment of its members in the everyday teaching led the leaders of the association not to be satisfied by the mere change of the contents to be taught. They wanted to radically change the teaching methods and to leave the world of principles for definitely setting up practical modalities of action in the classrooms (de Cointet, 1975). The association advocated for a change of the program of studies. The programs should contain:
- a list of core subjects consisting of the concepts to be acquired by students in the school year;
- a list of themes to be chosen by the teacher for either motivating the introduction of new knowledge, or illustrating the usefulness of already introduced knowledge, or nurturing new and free investigations. In particular applications related to real life were considered as providing fruitful themes.

The need for aligning mathematics with reality and the modelling role of mathematics may be linked with several Italian teaching projects that aim at constructing mathematical knowledge through contextualization in domains of experience outside mathematics (Boero, 1994). The book by Castelnuovo and Barra (1976), *Matematica nella realtà*, is a representative of this trend.

Members of the association and the IREMs undertook a huge work on the links between core knowledge and themes. Many innovative proposals of teaching by means of core themes (noyaux-thèmes) were published in the journal of the association, in booklets or in textbooks (see, in particular, *Le Bulletin Vert* de l'APMEP, n° 300, September 1975).

The failure of the New Math reform provided evidence of the need of taking into account more than the mathematical contents, to make use of some general pedagogical and psychological principles (Artigue, 1990, 1998) in the search for improving teaching, and to know more about the learning processes and the links between teaching and learning. This certainly contributed to the need of developing research on mathematics teaching and learning that included also empirical elements. The same need emerged at the international level as expressed by Begle (1969) in his lecture at the first ICME in Lyon: Neither teachers, nor mathematicians, nor mathematics educators had "been in a position to gather, during the course of our ordinary activities, the kind of broad knowledge about mathematics education we need" (p. 239).

Some of the innovations taking place in French schools during the '70s were forerunners of the method of didactical engineering.

## 4. Teaching projects based on a dialectics between theory and empirical investigations

In France, long-term teaching projects covering almost all the mathematics teaching about numbers and measurement were designed and experimented in primary school by Brousseau, Douady, and Perrin-Glorian, from the early seventies. From an institutional point of view, French primary school could be more easily a place for long-term experimentations than secondary school. The culture in primary school differed from the one in secondary schools. In particular primary school teacher education was not carried out in universities at that time.

The projects mentioned above started from mathematical choices. In Brousseau's project about decimal numbers (1997, chapters 3 and 4), the epistemological rationale is to introduce decimal numbers as economical tools through which comparing, adding, and subtracting fractions can be done more quickly and with fewer errors. In particular, some types of problems – such as finding a new fraction lying between two given fractions – could also be solved more easily. The main idea of the teaching process involves constructing rational numbers as tools for measuring, and then decimal numbers as tools for approximating rational numbers. The final part of the teaching sequence focuses on rational numbers as operators, culminating in construction of the product of two rational numbers in terms of the composition of two mappings. In the project of Douady and Perrin-Glorian (Douady, 1980, 1986), decimals were introduced as approximating real numbers in measures of lengths that were supposed to be concepts known to the students.

However, although the mathematical choices were prevailing in these projects, their design contained in action some theoretical aspects that were later formulated and theorized by their authors. For example, a lever used by Douady in the sequencing of the tasks was the interplay between the numerical and the geometrical settings on the one hand, and between settings and registers on the other hand. The notion of setting introduced by Douady refers to a set of objects and relationships between them belonging to a domain of mathematics. A setting not only includes objects and relationships but also various formulations and mental images. Examples of settings are the numerical setting, the geometrical setting, the algebraic setting. The term *register* denotes here a semiotic register, i.e. a semiotic system for representing objects and relationships (Duval, 2006). The role of visual representation was not only to express and support mathematical thinking. It was also meant for posing problems that cannot be solved in the register in which it was expressed, in order to require a move to another setting and/or register.

One of the problems posed in the teaching sequence by Douady for introducing decimal numbers was to find the length of the side of a square with given area equal to a whole number. The 8- to 9-year-old students could not solve the problem in the numerical setting. The graphical register with a system of axes was introduced. Students had to represent a rectangle with dimensions $a$ and $b$ by means of a point $(a, b)$ on this system. A whole number $p$ was given. Students had to represent many rectangles then to color each obtained point in red if the area of the corresponding rectangle was larger than $p$, in blue if it was less than $p$ and in black if it was equal to $p$. Then they had to find points representing rectangles with area equal to $p$. The initial question became: Is there a square among the rectangles and what is the length of its sides?

In the design of the teaching project about decimals, Brousseau examined how decimal numbers had evolved within the wider field of mathematics in order to identify the key mathematical problems which gave rise to decimal numbers, and to clarify the relationships between decimal numbers and other types of number, especially rational numbers, typically expressed in the form $a/b$. He also investigated the former and current presentations of decimals in teaching. These studies were published later (available in English in Brousseau, 1997, chapter 3). Brousseau started from the notion of obstacle proposed by Bachelard and distinguished between three origins of obstacles: ontogenetic, epistemological, or didactical. After Bachelard (1938), who introduced the notion of epistemological obstacle, i.e. an obstacle constitutive of the way of knowing, Brousseau (1997) considered that knowledge is simultaneously support and obstacle. Obstacles are made apparent by errors or inefficient processes. Such errors and processes are not due to chance but are persistent and reproducible. Knowledge is very efficient in certain situations but can be inappropriate for other ones. Whereas epistemological obstacles can be found in the history of the concepts themselves, didactical obstacles stem from the presentation of a concept and the way of using it in teaching. Inherited from a long tradition, a widespread presentation of decimal numbers is associated to measurement and related to technical operations on whole numbers. "As a result, for students today, decimal numbers are whole numbers with a change of units" (Brousseau, 1997, p. 87). Overcoming obstacles means transforming knowledge acquired by the learner. Facing the learners with problem situations and organized *milieux* with which the learner interacts is the way proposed by Brousseau.

The authors of these two long-term projects did not claim to have used a didactical engineering method because the term was not yet coined. However, it is very clear that problems or rather problem situations to which the students were faced played a fundamental role for creating the conditions of students' development and transformation of knowledge.

## 5. Problem situations and development of students' knowledge

In the mid-seventies, after the New Math reform, research on the development of students' conceptions and understandings took place in France simultaneously to the design and experimentation of these long teaching sequences.

Feeling that it was not enough to change the curricula without knowing more about the ways students understood mathematical concepts, several researchers investigated the solving strategies and erroneous procedures of students faced with well-chosen problems in order to propose models of their thinking processes, understandings, and conceptualization (Vergnaud, 1991).

Student conceptions of specific mathematical notions could be identified through situations students were faced with, as expressed by Rouchier (1980) and Artigue and Robinet (1982). When presenting conceptions about the notion of circle at primary school, Artigue and Robinet wrote that they did not want to analyze the students' conceptions independently of a precise study of situations in which these conceptions were involved.

Situations are chosen according to the conceptions they may favor and, if they are in a sequence, their order is also chosen in the same way. Several research projects studied how students' knowledge developed in a sequence of problem situations carried out in classroom with teachers' interventions and collective phases under the guidance of the teacher.

Two significant examples are given by the situations and didactical processes on rationale positive numbers (Rouchier, 1980) and the didactical experiment on the concept of volume (Vergnaud et al., 1983). This latter research project gave rise to a whole issue of the newly created French journal, *Recherches en didactique des mathématiques*, which consisted of three articles: the first one on the conceptions and competences of students of four middle school classes when faced with tasks outside the classroom (Ricco, Vergnaud, & Rouchier, 1983), the second one on a sequence of didactical situations done in a grade 7 classroom (Vergnaud et al., 1983), and the third one on a comparison between students' answers to a questionnaire given before the sequence and to the same questionnaire given after the sequence (Rogalski, Samurçay, & Ricco, 1983). In the introduction of the issue (pp. 23–24), Vergnaud claimed how the theory of situations, the psycho-genetic complexity and the task analyses complement each other. However, his argument reveals that the general aim of the study lies in investigating the genesis of knowledge on a short term for the teaching sequence and on a longer term for the interviews:

> Il existe un temps long de la psychogenèse, bien connu des psychologues, qui se mesure en années et qui permet d'établir des hiérarchies dans la complexité des problèmes et des concepts mathématiques. Il existe aussi un temps court de la psychogenèse, moins bien étudié que le premier et pourtant essentiel en didactique, qui concerne l'évolution des conceptions et des pratiques d'un sujet ou d'un groupe de sujets face à une situation nouvelle. (p. 24) [There is a long-term time of the psycho genesis, well known from psychologists, that is measured in years and allows to establish hierarchies in the complexity of problems and mathematical concepts. There is also a short-term time of the psychogenesis, less studied than the former one but essential in didactics that deals with the development of conceptions and practices of an individual or a group of individuals faced with a new situation].

## 6. Didactical engineering

At the time of these investigations, i.e. at the beginning of the eighties, the term *didactical engineering* appeared in articles and internal meetings of the French community of researchers in mathematics education (Artigue, 1994). Didactical engineering refers to a method that aims at carrying out empirical studies of didactical phenomena in circumstances compatible with an ethical study of teaching, i.e. in the real and complex setting of classrooms:

> Artigue (…) describes didactical engineering as similar to the work of the engineer, who is acquainted with the major scientific knowledge and accepts the scientific methods but at the same time is obliged to work with very complex objects, far from the simplified objects which are studied by science. (Margolinas & Drijvers, 2015, p. 897)

A didactical engineering consisted of four phases: design of a teaching sequence made of a sequence of situations, experimentation in one or several classrooms, observation of the students' activity and of the teacher's interventions as well as of the collective discussions, analysis of the observations.

It becomes a method and is no longer an innovation as soon as the design of the situations considers each situation as depending on global and/or local variables. A variable of a situation (or of a task) is a feature of this situation affecting the possible solving strategies. Playing on such a feature may make the task easier or more difficult. It is a lever in the hands of the teacher or the designer of the tasks in order to foster the construction of knowledge by the learner. For example, in an additive task, the nature of the numbers is a variable that can have different values such as integers, decimals, fractions. The task is easier with whole integers than with decimals or with fractions – and often easier with decimals than with fractions.

For each situation, the researcher analyses the possible effect of different values of the variables on students' solving strategies and chooses the values according to the strategies (s)he wants to favor. Each situation is not considered isolated from the other ones but within the whole sequence of situations. Values of variables are chosen in order to foster an expected development of students' strategies during the sequence. Two components of the method are critical:

- the design of situations;
- the a priori analysis and the internal validation.

### *6.1. The design and role of situations*

A keystone is indeed the notion of *situation* calling for a specific functioning of knowledge. The problem is the source and criterion of mathematical knowledge from both epistemological and cognitive perspectives, wrote Vergnaud (1981) who later preferred to replace the word *problem* by *situation* under the influence of the theory of didactical situations by Brousseau. Piaget's theory of *equilibration* (Piaget, 1975) was a crucial source for the idea of adaptation in which students construct new knowledge through becoming directly engaged in solving a novel type of problem, refining their concepts and strategies in the light of feedback from a material and social milieu (Brousseau, 1997, pp. 64, 147). Here *situation* refers to a collection of problem-solving tasks and task environments designed to evoke a particular form of *a-didactical* adaptation on the part of students, and intended to help them construct some specific new knowledge. The adjective *a-didactical* refers to the fact that the students must experience the task not as intended to teach them but as if they had to cope with a real problematic situation outside the classroom and find a way to solve it with all their means.

Designing a situation not only means designing a problem but also determining the conditions under which it will be solved, the means of action of the students and the feedback they will receive from the environment in the solving process. Conditions, means of actions, and feedback depend on variables on which researchers can play for favoring an expected development of students' strategies.

In geometry, the move from a property used in action by students to another one less familiar can also be organized by a play on available instruments. A good example is given by the didactical engineering on reflection at grade 6 proposed by Grenier (1990). Paper folding is given at first for introducing symmetry lines, but then paper folding plays only the role of empirical checking of the validity of a construction. Students are rapidly asked to construct symmetry lines of figures without resorting to paper folding and with specific instruments in order to favor the use of mathematical properties. The play on instruments is systematically used to hinder the use of certain properties and favor the use of other ones.

For example, drawing the symmetry line of an isosceles trapezoid with only a straightedge and a set square cannot be done by using the midpoints of the parallel sides of the trapezoid but by using intersection point of diagonals *BD* and *AC* or lines supporting sides *AD* and *BC* and/or perpendicularity of the symmetry line and the parallel sides of the trapezoid (Figure 1). Only later the teacher was supposed to formulate the properties used in action by students, after she has gathered the various strategies.

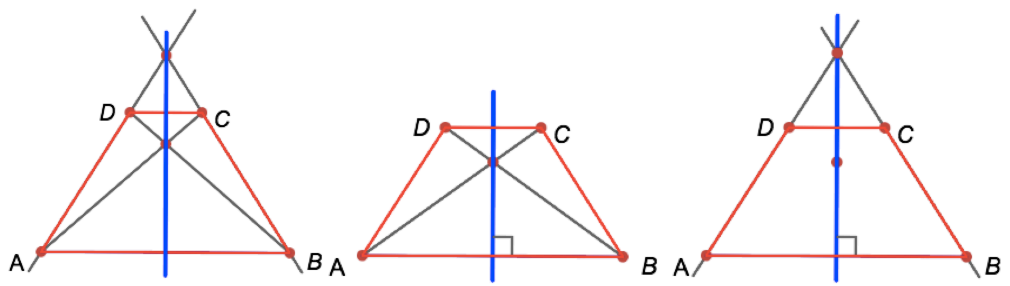



*Figure 1*. Constructing the symmetry line of an isosceles trapezium without using midpoints.

Didactical engineering gives an important place to problems and the organized milieu. The construction of these problems and of a milieu is done by means of an a priori analysis.

## 6.2. A priori analysis *and internal validation*

The design of the teaching sequence in didactical engineering is based on an *a priori analysis* that plays a critical role since the a priori analysis is contrasted with the a posteriori analysis of the observations of the implementation in the classroom. *A priori* does not refer to a temporal place (i.e. prior to the experimentation) but refers to the independence of the analysis from any empirical fact coming from the experimentation. The discrepancies between a priori and a posteriori analyses lead to reconsider the hypotheses on which the a priori analysis is based and allow refining or even modifying the theoretical approach underpinning the research work.

As explained above in the example of the teaching decimals project by Brousseau, the a priori analysis devotes a large part to the epistemological analysis of the mathematical content involved in the teaching project, but also to a cognitive analysis of the available knowledge of the students based on research results, and to an analysis linked to the institutional functioning of the teaching. These two latter analyses are critical for the functioning of the situations in classrooms. The a priori analysis must take into account the teaching constraints coming from the program of studies, as well as the possibility for the teacher to manage the project in the classroom. At the cognitive level, an a-didactical situation is expected to foster the emergence of new solving procedures which will be the seed of new knowledge. Students must be able to start solving the task of this situation, but with an incomplete or tedious procedure if the a-didactical situation cannot play its role. The design of such situations must optimize the choice of the variables of the situation in order to secure as much as possible the expected processes of the students and the adequacy of the teaching project with the usual teaching in the classroom.

Whereas the projects mentioned above on rational positive numbers and on the concept of volume used pre- and post-questionnaires to assess the learning by students, the didactical engineering proceeds by using an internal validation. Validation is done by comparing the students' expected solving processes in the a priori analysis and the observed processes in the classrooms. In case of discrepancies, an analysis of the students' solving processes is carried out and may lead to modify the expected role of the variables of the situations or reveal elements of the milieu not taken into account in the a priori analysis, as in the teaching sequence by Grenier (1990, section 6).

The internal validation process is a characteristic feature of didactical engineering and makes it different from other types of teaching experiments in classrooms.

## 7. Extension of didactical engineering

In a first period of time, didactical engineering investigated the teaching of specific concepts or, as said above, the development of students' conceptions in a sequence of problems, generally at primary or secondary school.

Later the method sheds light to components of the teaching process that were not enough investigated and theorized. Finally, it was used for studying general didactical phenomena. Let us give some examples.

Grenier (1990) experimented a first time a teaching sequence on reflection at grade 6. Contrasting the a priori analysis with the a posteriori analysis, she observed that the play on instruments did not necessarily lead to a change of solving strategies. When they did not have measurement tools, the students tried to estimate measures by eye or using a pen as a measurement unit, instead of using geometrical properties. The interventions of the teacher seemed to have no effect on students' strategies. Grenier modified the situations for another teaching experiment the following year, but even if the trajectories of the students were closer to the expected ones, the analysis of the observations revealed strong resistances both in the students' conceptions and in the teacher interventions. In collective debriefings of the group work, the teacher ignored some popular strategies and focused on strategies used by a small number of students because they were the expected ones. He rejected strategies of measurement with a pen or with the section of a ruler, by saying that it was not precise enough. This argument was not understood by students who thought that using a measurement was more precise than using the fact that points are collinear. This research showed that the a priori analysis could not deal only with situations but also with teachers' interventions and decisions. The a priori analysis had also to take into account phenomena related to the didactical contract. Some behaviors of students and teachers can be explained only by the fact that there are implicit rules underlying the progress of the classroom. This research showed very clearly how much a teaching sequence results from a balance between two poles: the a-didactical pole and the pole related to the didactical contract (Brousseau, 1990).

Didactical engineering was used at the tertiary level (Robert, 1992; Dorier, Robert, Robinet, & Rogalski, 1994) and questioned the construction of knowledge as a tool for solving problems at that level. More than efficient tools for solving a class of problems, concepts taught at the tertiary level own a power of generalization and unification of different strategies and methods. It seems difficult that students can construct such concepts on their own from a-didactical situations.

The study of phenomena related to the integration of technology into the teaching of mathematics used the didactical engineering method. For example, instrumentation processes of dynamic geometry were investigated by Restrepo (2009) in a long-term didactical engineering (one year) method.

The robustness of the didactical engineering method was also investigated by using teaching sequences designed with a didactical engineering method in other conditions. For example, Perrin-Glorian (1993) showed that it is very difficult for less advanced students to engage in a-didactical situations and produce new solving strategies. It was also very difficult for them to understand the institutionalization phase done by the teacher. In this phase, the teacher extracted and formulated the mathematical and official knowledge from a-didactical situations. The students did not understand the link between the teachers' discourse and what they experienced in the situations.

Especially over the twenty past years, the landscape of research in mathematics education changed a lot. Two phenomena must be mentioned:

- the only indirect influence of didactical engineering on teachers everyday practice and the move to second generation didactical engineering (Perrin-Glorian, 2011);
- the growing use of networking of theoretical frameworks (Artigue, 2009a) at a national level as well as the international level.

It turns out that teachers do not make use of original situations of didactical engineering, but instead use simplified and isolated situations presented in worksheets, with the main ideas originating from situations developed in didactical engineering (Perrin-Glorian, 2011). This resonates with Bartolini Bussi's (2005) regret of the too heavy weight of the theoretical considerations of the papers of an *Educational Studies* special issue about French research on classroom situations: "It may act as an obstacle to the diffusion of results and methods" (p. 305). Perrin-Glorian investigated the transformation process of an original didactical engineering into a didactical engineering appropriate for teaching and claims that this transformation requires work, in particular on the conditions of the transmission of the engineering.

The internalization of research, as well as the complexity of the processes in mathematics teaching, led to use several theoretical frameworks in a same research project. Whereas didactical engineering initially was developed within the theory of didactical situations, the method was then attached to other theoretical frameworks. For example, the instrumentation theory was associated to the theory of didactical situations or with the anthropological theory of didactics to study the use of digital technology in mathematics teaching (Artigue, 2009b). Frameworks developed outside of France shed light on aspects of the teaching process less addressed by the first French didactical engineering projects. An appropriate example is provided by the theory of semiotic mediation (Bartolini Bussi & Marriotti, 2008) which focuses its attention on the role of signs in the construction of knowledge and on the transformation processes of personal signs constructed by students into mathematical signs. Teaching projects elaborated within the theory of semiotic mediation give a central role to the semiotic action of the teacher, in particular in the collective discussions she organizes and orchestrates, and in which she bridges personal meanings of the students constructed in their activities to mathematical meanings. For example, Mariotti (2013) designed long-term teaching projects making use of the semiotic potential of software programs: Students are faced with purposefully designed tasks within computer environments fostering the development of personal meanings that the teacher helps evolve through carefully conducted collective discussions. The method used in these teaching sequences consist of analyzing the formulations of the teacher and of the students in order to identify signs and their transformations as well as the discursive strategies of the teacher. It is clear that sophisticated analyses of teachers' discursive strategies cannot result from an a priori analysis and the authors of these projects may not refer to the method of didactical engineering even if the design of tasks given to students is carefully chosen with learning aims in mind.

The long-lasting links between the Italian and French communities of mathematics education led to teaching learning projects resorting to frameworks from both countries making an original use of didactical engineering. For example, the theories of didactical situations and of semiotic mediation were used in interaction in a long-term teaching project about graphs of functions (Falcade, Laborde, & Mariotti, 2007). The a posteriori analyses showed how the same observed phenomenon can be interpreted differently in each framework and thus lead to establish bridges between both frameworks. The power of a cross-analysis methodology also resorting to the theory of didactical situations and to the theory of semiotic mediation is very well exemplified in Maracci, Cazes, Vandebrouck, and Mariotti (2013).

The history of didactical engineering showed that concerns about the contents to be taught at the time of the New Math reform provided a context for investigating teaching and learning phenomena beyond the pure mathematical content. The method of didactical engineering started as a method for better understanding the relationships between the design of problem situations and the development of specific mathematical concepts by students. The method was then extended into several directions: length of the teaching experiment, teaching at the tertiary level, less advanced students, use of technology, studies of the didactical contract and of the role of the teacher, and finally led to study other phenomena related to teaching.

Didactical engineering is still a research method. The development of resources for mathematics teachers is nowadays becoming a critical issue with the increasing number of resources available on Internet. What are the best ways of transmitting didactical engineering products in order to facilitate their use by a large number of teachers without changing their impact on the learning processes? (Perrin-Glorian, 2011). What are the conditions for such a didactical engineering product to be really used in ordinary teacher practice? Which mathematical and didactical knowledge do the teachers need to make use of such resources? Many questions remain and renew the research questions related to didactical engineering.

## References

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281–307.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 27–39). Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (1998). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. New ICMI Study Series (Vol. 4, pp. 477–489). Springer Netherlands.

Artigue, M. (2009a). Didactical design in mathematics education. In C. Winwlow (Ed.), *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings of NORMA08* (pp. 7–16). Rotterdam: Sense Publishers.

Artigue, M. (2009b). Rapports et articulations entre cadres théoriques: Le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *29*(3), 305–334.

Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *3*(1), 5–64.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 720–749). New York: Routledge.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique: Contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Paris: Vrin.

Bartolini Bussi, M. G. (2005). When the classroom situation is the unit of analysis: The potential impact on research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics Education*, *59*(1–3), 299–311.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Begle, E. G. (1969). The role of research in the improvement of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *2*(2–3), 232–244.

Boero, P. (1994). Situations didactiques et problèmes d'apprentissage: Convergences et divergences dans les perspectives de recherche. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp.17–50). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers.

Castelnuovo, E., & Barra, M. (1976). *Matematica nella realtà*. Torino: Boringhieri.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné* (2nd ed.). Paris: La Pensée Sauvage.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris: Hermann.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Proposte metodologiche illusorie nel processo di insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica*. *73*, 15–42.

De Cointet, M. (1975). Editorial. *Le Bulletin Vert*, 300, 415–416.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en Deug première année. Essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 328–342). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, *1*(1), 77–112.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5–31.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies of Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Falcade, R., Laborde, C., & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(3), 317–333.

Freudenthal, H. (1958). Preface of the Editor. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 5–7). Groningen: J. B. Wolters.

Furinghetti, F. (2006). Not out of the blue: Historical roots of mathematics education in Italy. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 99–103.

Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F., & Giacardi, L. (2008). ICMI Renaissance: The emergence of new issues in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp.131–147). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Gattegno, C., Servais, W., Castelnuovo, E., Nicolet, J. L., Fletcher, T. J., Motard, L., Campedelli, L., Biguenet, A., Peskette, J. W., & Puig Adam, P. (1958). *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

Grenier, D. (1990). Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale: Eléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(1), 5–59.

Maracci, M., Cazes, C., Vandebrouck, F., & Mariotti, M. A. (2013). Synergies between theoretical approaches to mathematics education with technology: A case study through a cross-analysis methodology, *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 461–485.

Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France: An insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathematics Education*, *47*(6), 893–903.

Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: How the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education*, *45*(3), 441–452.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes «faibles». *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(1–2), 5–118.

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement: Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques: Actes de la XV Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 57–78). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives: Problème central du développement* (Vol. 33, Etudes d'épistémologie génétique). Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J., Beth, E. W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). *L'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

Restrepo, A. M. (2009). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*. Paris: Édilivre.

Ricco, G., Vergnaud, G., & Rouchier, A. (1983). Représentation du volume et arithmétisation: Entretiens individuels avec des élèves de 11 à 15 ans. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(1), pp. 27–69.

Robert, A. (1992). Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire: Questions de problématique et de méthodologie. Un exemple: un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(2–3), 181–220.

Rogalski, J., Samurçay, R., & Ricco, G. (1983). Analyse du pré-test/post-test sur le volume. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(1), 121–132.

Rouchier, A. (1980). Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *1*(2), 225–275.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Development in mathematical education: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 159–209). Cambridge: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(2), 215–231.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2–3), 133–169.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Desmoulieres, S., Landré, C., Marthe, P., Ricco, G., Samurçay, R., Rogalski, J., & Viala, A. (1983). Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(1), 71–120.

# Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas

**Deissy Narváez Ortiz**
*Doctorado en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
*Grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia*
*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Universidad de Bologna, Italia*

**Abstract.** *Here is shown a brief summary of a research project, which aims to demonstrate that the Brousseau's concept of the didactical contract still has an explanatory power and a heuristic value over the current mathematics teaching phenomena. We propose to make a study of the theorization process of the concept and its subsequent interpretations, and by searching for new examples of the manifestation of the effects and clauses of the didactical contract in the classroom.*

*Keywords:* didactical contract, effects, clauses.

**Sunto.** *Si presenta una breve sintesi di un progetto di ricerca in corso con il quale si vuole mostrare che il costrutto di contratto didattico di Brousseau possiede ancora un potere esplicativo e un valore euristico per quanto concerne i fenomeni di insegnamento della matematica. Ci proponiamo di realizzare uno studio del processo di teorizzazione del concetto, la sua relazione con successive interpretazioni e la ricerca di nuovi esempi di manifestazioni di effetti e di clausole del contratto nelle aule scolastiche.*

*Parole chiave:* contratto didattico, effetti, clausole.

**Resumen.** *Se presenta la breve síntesis de un proyecto de investigación en desarrollo que pretende mostrar que el constructo del contrato didáctico de Brousseau tiene aún poder explicativo y valor heurístico sobre los fenómenos de la enseñanza de la matemática. Proponemos realizar un estudio del proceso de teorización del concepto, su relación con posteriores interpretaciones, y la búsqueda de nuevos ejemplos de manifestación de efectos y cláusulas del contrato en el aula de clase.*

*Palabras clave:* contrato didáctico, efectos, cláusulas.

## 1. Premisa

La experiencia en formación y capacitación de profesores nos ha mostrado que el estudio de los efectos del contrato didáctico mediante ejemplos concretos genera en los maestros una identificación casi inmediata con sus prácticas y aporta elementos para la reflexión sobre su gestión en el aula. D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sarrazy (2010) reportan este hecho y mencionan que fueron los mismos profesores en capacitación quienes les aportaron algunos episodios tomados de sus propias prácticas, en ellos se evidencian ejemplos de efectos (como Topaze, Jourdain y Dienes). También Brousseau y Warfield (1999) plantearon así su preocupación al respecto cuando afirman:

> Debemos abordar el estudio de la práctica en el aula con medios antropológicos. El hecho de que existan efectos y que se practican a diario por miles de maestros, independientemente unos de otros, muestra la importancia de estudiarlos. La idea es que no se conviertan en perjudiciales, porque no hay nada en la cultura que advierta a los maestros de las consecuencias de su uso repetido. (Brousseau & Warfield, 1999, p. 62)

Este trabajo pretende contribuir a este propósito, intentando aportar nuevos ejemplos y estudiando la idea original de contrato didáctico, con el fin de clarificar algunas consecuencias derivadas de la diversidad de interpretaciones dadas a este concepto durante estos aproximados 40 años de uso.

## 2. Marco teórico

Como punto de partida se considera el trabajo de D'Amore (1999), quien identificó anticipadores clave del concepto de contrato didáctico en la literatura, como son: el contrato social de Jacques Rousseau (1762/1966); el hecho que el estudiante no obra cognitiva sino relacionalmente, reportado por Laing (1969); la explicación del comportamiento del estudiante basado en algunas reglas, realizado por Bertin (1968); y la idea de contrato pedagógico de Filloux (1973, 1974).

Otra fuente de desarrollo teórico consiste en el análisis de las definiciones sobre contrato didáctico dadas por Brousseau (1980, 1986). Algunos elementos presentes en estas definiciones serán objeto de estudio para profundizar en el significado del concepto. Estos elementos son: la comunicación y la interpretación, los hábitos, lo explícito y lo implícito en las prácticas de aula, las responsabilidades en los roles del profesor y del alumno, las obligaciones recíprocas, y la sociología de los grupos, algunas de estas ideas son profundizadas en D'Amore y Radford (2017).

Otra fuente de análisis es el estudio del contexto teórico del concepto: la teoría de las situaciones didácticas (TSD). Empezando por la teoría sobre el aprendizaje que fundamenta la TSD: el aprendizaje por adaptación. Según Brousseau (1986): "El alumno aprende adaptándose a un medio que es productor de contradicción, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana" (p. 296). En correspondencia con esta forma de entender el aprendizaje, el concepto de enseñanza que subyace sugiere al profesor propiciar en el estudiante las adaptaciones deseadas, mediante una elección (o diseño) prudente de los problemas que propone. Margolinas (1993) resaltó que el aprendizaje por adaptación le asigna un papel fundamental a “la génesis del conocimiento por la constitución del sentido” (p. 136) y que la concepción de enseñanza asociada a esta concepción de aprendizaje en la TSD está relacionada con la constitución del *medio*. Estos aspectos permitirán conceptualizar la situación a-didáctica, en la cual se establece un énfasis mayor en la relación entre el estudiante y el saber, de manera que la situación genera discusiones que producen nuevo conocimiento. Este hecho se atribuye a que la situación a-didáctica está especialmente vinculada a las acciones que el estudiante puede emprender generando así el establecimiento de una necesidad motivada por la actividad (D’Amore, 1999). Para clarificar la relación entre la situación didáctica y a-didáctica, Acosta, Blanco y Gómez (2010) explican que:

> Aunque podría pensarse que estas situaciones están totalmente en oposición, puesto que una necesita del profesor y la otra no, según la TSD se da una interacción en la que la situación a-didáctica puede ser parte de una situación didáctica. (Acosta, Blanco, & Gómez, 2010, p. 176)

Al respecto D’Amore (1999) plantea que en este modelo teórico una situación didáctica sobre un determinado tema relativo al saber posee dos componentes: una situación a-didáctica y un contrato didáctico. El estudio de las relaciones entre el aprendizaje por adaptación, la situación didáctica y la situación a-didáctica permite entender que una forma legítima de intervención del profesor desde el diseño y la gestión de situaciones en el aula implica motivar el tránsito por las fases de la situación didáctica, que son: devolución, implicación, construcción de conocimientos personales, socialización o comunicación, validación e institucionalización (Brousseau, 1986, 1988).

La revisión bibliográfica sobre contrato didáctico nos muestra dos herramientas clave para observar el contrato didáctico en el aula de matemáticas, estas son: los efectos y las cláusulas. Las tipificaciones de estas herramientas se han caracterizado, algunas con soporte en datos empíricos y otras tan sólo teóricamente.

La tipología de “efectos” fue introducida por Brousseau (1986), los más conocidos son: el efecto Topaze, el efecto Jourdain, el efecto del deslizamiento meta cognitivo, el efecto Dienes, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de las situaciones de enseñanza.

La tipología de cláusulas fue introducida por primera vez por Chevallard (1988) y profundizada por D’Amore y sus colaboradores en diversos estudios. La cláusula es una distinción solamente analítica que permite considerar las diferentes componentes de la relación contractual y analizarlos con el fin de explicar comportamientos de los estudiantes en relación con el saber matemático, los cuales se derivan al parecer de los efectos del contrato didáctico. Las más conocidas son: cláusula de la edad del capitán (Chevallard, 1988); cláusula “un problema real es distinto de un problema escolar” (D’Amore, 1999; Zan, 1991–1992); cláusula de delegación formal (D’Amore

& Martini, 1997); cláusula de exigencia de la “justificación formal” (D’Amore & Sandri, 1998) y cláusula “edad de la Tierra” (Ferretti, Gambini, & Bolondi, 2016), entre otras.

## 3. Problema de investigación

La idea de “contrato didáctico” fue introducida por Brousseau en el campo de la investigación en didáctica de la matemática desde el año 1978 como un recurso para estudiar el fracaso electivo en matemática. Esta idea no sólo fue recibida por la comunidad de investigadores con gran aceptación, sino que fue rápidamente convalidada. Una vez teorizado, el concepto permitió comprender muchos fenómenos no sólo en el campo de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, sino también en otras disciplinas, donde se introdujo con éxito.

La celebridad del concepto y la aparente simplicidad de su definición, ha generado durante estos 40 años el surgimiento de múltiples y diversas interpretaciones. La historia bibliográfica sobre este concepto, realizada por Sarrazy (1995), documenta varias interpretaciones que han surgido en la literatura y presenta las enormes diferencias entre los enfoques asociados al mismo nombre. D’Amore et al. (2010) habían ya rastreado alrededor de 70 definiciones distintas, lo que confirma que un concepto que fue tan natural y rápidamente aceptado estaba sujeto a interpretaciones erróneas. Esta multiplicidad de usos e interpretaciones ha generado un amplio deslizamiento semántico del término. En consecuencia, hoy es un concepto que se ha debilitado y se encuentra ante la posibilidad de perder su significado original tan significativo y concreto, lo cual es problemático dado su carácter de concepto fundante de la disciplina.

Por otra parte, la escasa producción de datos empíricos que convaliden hipótesis sobre el poder explicativo que tiene el constructo en situaciones reales de enseñanza-aprendizaje, y la poca exploración sobre el valor heurístico que éste pueda tener para mejorar las prácticas de los profesores generan una situación problemática cuyo abordaje se considera necesario. Un ejemplo del valor heurístico se encuentra en el análisis del caso de Gaël (Brousseau & Warfield, 1999); la intervención de los investigadores permitió ver que es posible usar el conocimiento sobre el contrato didáctico y sus efectos para tomar decisiones en el diseño y en la gestión de las situaciones, y que este uso puede hacer la diferencia en términos de superar el fracaso electivo. Un ejemplo sobre el poder explicativo del concepto, es analizado por Sarrazy (2002) y Sarrazy y Novotná (2013); ellos lo llamaron “responsividad creativa al contrato”. En su estudio encontraron que los alumnos no están igualmente preparados para identificar y decodificar las expectativas implícitas de los maestros en las situaciones que ponen en juego en el aula.

En consecuencia, necesitamos herramientas de análisis de las relaciones contractuales que aporten elementos para analizar las prácticas en el aula de matemática. La idea es que, en el largo plazo, este conocimiento permita analizar no sólo aquellas prácticas que tienen efectos negativos en el aprendizaje, sino las buenas prácticas en las que la conciencia sobre la relación contractual sea usada por el profesor para controlar la incidencia de la autoridad en el aprendizaje, así como atender y superar casos de fracaso electivo. Necesitamos identificar formas similares en que se manifiestan los efectos y las cláusulas del contrato en todos los niveles escolares, para que el profesor pueda identificarlos más fácilmente, y requerimos construir una teorización de las herramientas para observar manifestaciones del contrato didáctico en el aula. Estos desarrollos permitirán retroalimentar los procesos de formación de profesores, en el sentido de poder anticipar actuaciones, rupturas, modificaciones y demás acciones que nos ayuden a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática y a disminuir el impacto del fracaso electivo en matemática.

## 4. Preguntas de investigación

1. ¿Qué aspectos (génesis, ideas predecesoras, conceptualización, conexiones con otros conceptos, interpretaciones) permiten caracterizar la idea original de contrato didáctico, su proceso de conceptualización y sus posteriores interpretaciones?
2. ¿Cuáles son las herramientas (efectos, cláusulas) para observar el contrato didáctico en el aula y qué tipo de información aportan en el estudio de las situaciones didácticas?
3. ¿Qué nuevos ejemplos de los efectos y de las cláusulas del contrato didáctico pueden reportarse mediante observación en distintas aulas de matemática?

## 5. Descripción de la metodología de la investigación

El estudio propuesto es de tipo cualitativo y tiene dos enfoques. El primero de naturaleza histórico-crítico-analítico de la idea original de contrato didáctico y de estudios reportados en el campo en relación con este concepto. El segundo enfoque es etnográfico, de búsqueda de datos empíricos en aulas de matemática que permitan rastrear ejemplos de la ocurrencia de los efectos y cláusulas del contrato didáctico, mediante observación pasiva (no-participante). El abordaje según estos dos enfoques configura dos grandes fases metodológicas del estudio: fase 1) de análisis histórico-crítico, y fase 2) de búsqueda de datos empíricos.

Para la primera fase, se tienen en cuenta las características de la investigación histórica en educación matemática siguiendo la caracterización de Karp (2014) y los elementos básicos de la investigación documental. De acuerdo con Valles (1999), establecer relaciones y posibles explicaciones mediante investigación documental requiere un esfuerzo por parte del investigador para comprender los documentos desde el contexto de las condiciones (materiales, sociales) de su producción y de su lectura. Considerar estas condiciones permitirá comprender las formulaciones del autor (en este caso: Brousseau y colaboradores), la terminología escogida y los significados atribuidos a las categorías teóricas que hacen parte de la teorización del contrato didáctico.

La segunda fase consiste en el rastreo de ejemplos de segmentos de clase para describir manifestaciones del contrato didáctico. En particular, aquellas situaciones reales de aula que puedan ser asociadas a efectos y cláusulas que ya conocemos y a otros eventualmente nuevos. En esta fase se usará el método etnográfico con observación pasiva o no participante (Ander-Egg, 1993). Se incorporan en la observación varios elementos: dos tipos de sujeto, el observador y el observado; dos tipos de medios, los sentidos y los instrumentos que apoyan la sistematización de lo observado; y finalmente, se debe disponer de un cuerpo teórico que oriente la observación, ya que no es posible observarlo todo en un ambiente (Ander-Egg, 1993).

La recolección y la selección de datos relevantes se realiza, de acuerdo con Radford (2008), en virtud de la necesaria coherencia entre metodología y principios teóricos. Para la fase 1, las fuentes primarias serán de dos tipos: narraciones o relatos de experiencias y textos. Los instrumentos principales en esta fase son las fichas bibliográficas y de resumen, así como la base de datos en la que se organiza la información colectada sobre cada uno de los textos y narrativas consultadas.

Para recolectar datos en la segunda fase se hace observación en clases de 10 profesores de matemática de distintas instituciones de la ciudad de Bogotá y de distintos grados escolares. Una vez realizadas las observaciones, los datos se codificarán por episodios que reúnan diferentes observables o indicadores de la ocurrencia de un efecto o de una cláusula en particular. Cada episodio se narrará detalladamente y se analizará con el fin de seleccionar los ejemplos más representativos de los efectos y cláusulas observados. Los instrumentos de recolección de datos en esta fase son: el diario de campo del observador, el registro con dispositivos de grabación de audio y video (previa aprobación de los participantes) y la entrevista semi-estructurada (Gubrium & Holstein, 2001) con profesor o estudiantes, en el caso que sea necesario comentar e indagar algo más sobre algún comportamiento descrito mediante la observación, permitiendo contrastar datos y complementar la información.

Para el análisis de datos en la primera fase se configuran tres grandes categorías iniciales con sus descriptores: la génesis de la idea, la teorización del concepto y el uso de este concepto en investigaciones y teorizaciones posteriores. Luego se realiza el análisis sobre el poder explicativo del contrato didáctico desde el punto de vista de las herramientas para observar el contrato reportadas en investigaciones y documentos teóricos, teniendo como base los ejemplos aportados por Brousseau y demás autores en las categorías ya conocidas como efectos y cláusulas.

En la segunda fase, un primer tipo de análisis permitirá describir episodios de clase por grado escolar que puedan ser explicados mediante efectos y cláusulas del contrato didáctico. Para seleccionar tales episodios se tendrá en cuenta que en ellos se manifiesten observables relativos a categorías teóricas o a rupturas del contrato didáctico. Una vez se disponga del conjunto de episodios de clase observados, se realizará un segundo tipo de análisis que consiste en buscar invariantes, comportamientos tipo y nuevos efectos o cláusulas. El análisis en esta fase se realiza permanentemente siguiendo el esquema de adecuación explicativa por medio de la triangulación y el número de observaciones que apoyan un aspecto teórico, propuesto por Clement (2000).

## 6. Hipótesis de respuesta

Sobre la primera fase del estudio, se espera obtener una caracterización de la idea original de contrato didáctico y de las herramientas teóricas que permiten observarlo en el aula. Esta caracterización tendrá soporte en datos históricos y se complementará con un análisis crítico sobre diversas interpretaciones que hoy existen sobre este concepto.

Sobre la segunda fase del estudio, se plantea como hipótesis que: a) mediante los episodios observados y descritos podremos confirmar cláusulas y efectos ya conocidos; b) que obtendremos datos empíricos que soporten otros efectos y cláusulas eventualmente nuevos; c) es posible identificar invariantes que aparecen en los ejemplos independientemente del grado escolar y de las edades de los estudiantes; d) es posible identificar invariantes que aparecen en los ejemplos encontrados independientemente del tema específico que se esté trabajando en clase; e) que al identificar invariantes obtendremos base para mostrar que el contrato didáctico se manifiesta a cualquier nivel escolar y que las formas de manifestarse son muy similares.

## 7. Conclusiones

Puesto que las situaciones de enseñanza-aprendizaje y los objetivos de la formación matemática en el ámbito educativo, han cambiado significativamente en comparación con las situaciones y propósitos que orientaban las prácticas en los años ’70 y ’80, analizar la forma en que el contrato didáctico sigue teniendo poder explicativo sobre los fenómenos de la didáctica actual puede configurar un aporte al campo disciplinar.

El aporte a los programas de formación de docentes es a mediano y largo plazo, ya que el estudio histórico-crítico-analítico sobre uno de los conceptos de la didáctica fundamental revelará algunas interpretaciones erróneas que se vienen haciendo hace años en el ámbito de la didáctica y, a su vez, permitirá abrir un campo de investigación que aún es muy rico en preguntas de investigación y abordajes metodológicos posibles desde las aulas de matemática.

## Referencias bibliográficas


Acosta, M. E., Blanco, L. A., & Gómez, K. L. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando *Cabri* como medio. *Revista Integración*, *28*(2), 173–189.

Ander-Egg, E. (1993). *Técnicas de investigación social* (23ª ed.). Buenos Aires, Argentina: Magisterio del Río de la Plata.

Bertin, G. M. (1968). *Educazione alla ragione*. Roma, Italia: Armando.

Brousseau, G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches*, *41*, 177–182.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'AMQ*, *28*(2), 14–24.

Brousseau, G., & Warfield, V. M. (1999). The case of Gaël. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(1), 7–52.

Chevallard, Y. (1988). *Sur l'analyse didactique: Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Marsella, Francia: IREM d'Aix-Marseille.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En R. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341–385). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora. [Versión en idioma español: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Fandiño M. I., Marazzani I., & Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del contratto*. Bolonia, Italia: Archetipolibri. (En curso de publicación en idioma español, Bogotá: Magisterio).

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *32*, 26–42.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotà: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., & Sandri, P. (1998). Les réponses des élèves aux problèmes de type scolaire standard à une donnée manquante. *Scientia paedagogica experimentalis*, *35*(1), 55–94.

Ferretti, F., Gambini, A., & Bolondi, G. (2016). The age of the earth effect: A situation of didactic contract. *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. Hamburgo, Alemania.

Filloux, J. (1973). *Positions de l'enseignant et de l'enseigné: Fantasme et formation*. París, Francia: Dunod.

Filloux, J. (1974). *Du contrat pédagogique*. París, Francia: Dunod.

Gubrium, J. A, & Holstein, J. A. (2001). *Handbook of interview research: Context and method*. Thousand Oaks, Londres, Nueva Delhi: Sage Publications.

Karp, A. (2014). The history of mathematics education: Developing a research methodology. En A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 9–24). New York, NY: Springer.

Laing, R. D. (1969). *L'io e gli altri: Psicopatologia dei processi interattivi*. Florencia, Italia: Sansoni.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. París, Francia: La Pensée Sauvage. [Versión en idioma español: Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga, Colombia: Publicaciones Universidad Industrial de Santander].

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Rousseau, J. J. (1966). *Émile ou de l'éducation* (M. Launay, Ed.). París, Francia: Garnier-Flammarion. (Obra original publicada en 1762).

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, *112*, 85–118.

Sarrazy, B. (2002). Effects of variability on responsiveness to the didactic contract in problem-solving among pupils of 9–10 years. *European Journal of Psychology of Education*, *17*(4), 321–341.

Sarrazy, B., & Novotná, J. (2013). Didactical contract and responsiveness to didactical contract: A theoretical framework for enquiry into students' creativity in mathematics. *ZDM*, *45*(2), 281–293.

Valles, M. (1999). *Técnicas cualitativas de investigación social: Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid, España: Síntesis.

Zan, R. (1991–1992). I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. En 3 partes: I: 1991, (*14*)7, 659–677; II: 1991, *14*(9), 807–840; III: 1992, *15*(1), 39–53.

# Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente

**Héctor Mauricio Becerra Galindo**
*Doctorado en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
*Grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia*
*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Universidad de Bologna, Italia*

**Abstract.** *In this article, we present the semiotic problems of the representations of infinite sets used in teaching practice, which arises from the teaching and learning processes of the infinite sets, where students' difficulties with regard to their cognitive construction are highlighted. They are especially associate with the lack of semiotic consciousness (conscious knowledge about the systems of representations that are mobilized in mathematical activity) of teachers regarding the representations established in the teaching of the infinite sets. In order to address this difficulty, it is necessary to investigate and describe the semiotic problems of the representations of the infinite sets in the teaching practice and in the textbooks.*

*Keywords:* infinite sets, semiotic representation, teaching and learning.

**Sunto.** *In questo articolo si presenta la problematica semiotica nelle rappresentazioni di insiemi infiniti usate nella pratica di insegnamento, che nasce dai processi di insegnamento e apprendimento di insiemi infiniti, dove si evidenziano le difficoltà degli studenti per quanto riguarda la loro costruzione cognitiva. Ciò è legato soprattutto alla mancanza di coscienza semiotica (cioè la conoscenza cosciente dei sistemi di rappresentazioni che si mobilitano nell'attività matematica) degli insegnanti per quanto riguarda le rappresentazioni stabilite nell'insegnamento di insiemi infiniti. Per far fronte a questa difficoltà, è necessario indagare e descrivere il problema semiotico delle rappresentazioni di insiemi infiniti nell'insegnamento e nei libri di testo.*

*Parole chiave:* insiemi infiniti, rappresentazione semiotica, insegnamento e apprendimento.

**Resumen.** *En este artículo se presenta las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos presentadas en la práctica docente, que surge de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, donde se evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva. Esta temática está asociada especialmente a la falta de conciencia semiótica (es decir el conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática) de los profesores respecto a las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar esta dificultad, es necesario indagar y describir las problemáticas semióticas de las representaciones* *de los conjuntos infinitos a partir de la práctica docente y del análisis de los libros de texto.*

*Palabras clave:* conjuntos infinitos, representación semiótica, enseñanza y aprendizaje.

## 1. Premisa

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos se evidencia dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva; estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico)[1] como se concluye en las investigaciones de Fischbein, Tirosch y Hess (1979), Duval (1983), Moreno y Waldegg (1991), Arrigo y D'Amore (1999, 2002), Tsamir (2000), Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), entre otros, y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993, p. 38; la traducción es en D'Amore, 2002): "(…) de un parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (paradoja de Duval), y que es consolidado por Duval (1995, p. 15) con su hipótesis "no hay noesis sin semiosis".

También se asocian a la falta de conciencia semiótica en las representaciones elegidas por los profesores en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos. Esta dificultad se empieza a evidenciar cuando los profesores realizan las siguientes afirmaciones respecto a las representaciones de los conjuntos infinitos:

> Inv: (...) ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?
> C: Obviamente son más, están además todos los negativos.
> (...)
> Inv: ¿Esto lo presentas en clase?
> C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos. (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209)

Evidenciemos otro argumento de otro profesor al dar respuesta a la pregunta "¿Cuántos son los números naturales: 0, 1, 2, 3, …?":

> F: Los números naturales son infinitos, ya que un conjunto es infinito si está conformado por infinitos elementos y 0, 1, 2, 3, … son infinitos. (Arrigo,

[1] El obstáculo epistemológico se propone desde la definición dada por Brousseau (1983), quien establece que "es un conocimiento estable que funciona bien en ámbitos anteriores, pero que crea problemas y errores cuando se le intenta adaptar a nuevas situaciones" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 135).

D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 215)

argumento que no presenta una construcción cognitiva correcta del objeto conjunto infinito,[2] pero que muestra claramente la interpretación que le está dando el profesor F a los puntos suspensivos en la representación 0, 1, 2, 3, … como los infinitos elementos que conforman el conjunto.

También se puede destacar que los profesores, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, recurren a los textos escolares de matemática como referentes para su planeación y diseño de actividades, aunque algunos profesores, al desconocer estos conceptos matemáticos (infinito, conjunto infinito) desde la epistemología, la historia y la semiótica, solo los asocian a la transposición didáctica elegida por el autor de los libros de texto (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011).[3]

Estos elementos que se han evidenciado respecto a la conceptualización de los conjuntos infinitos por parte de los profesores a partir de la elección (que no es univoca ni neutra) de representaciones de los conjuntos infinitos en su enseñanza y aprendizaje, puede ser una causa de la falta de construcción cognitiva del objeto matemático conjunto infinito por parte de los alumnos. Por lo tanto, nos parece necesario estudiar y analizar con cuidado las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos presentadas en la práctica docente.

## 2. Marco teórico

En la investigación se analiza, desde la historia de la matemática, los registros de representación semiótica que aparecen en la definiciones, presentaciones o ilustraciones del concepto de los conjuntos infinitos en su aparición y evolución. Para realizar este análisis se tendrá como base los siguientes documentos: el primer capítulo del libro de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) y la historia de las matemáticas de Heath (1921), de Boyer (1986), de Campos (2008), entre otros estudiosos en este campo.

Es importante destacar que la epistemología y la historia son significativos para el desarrollo de la investigación en educación matemática, ya que "el trabajo pionero de Guy Brousseau (…) nos ha enseñado que, cuando se debe enfrentar la didáctica de un cierto argumento, es necesario entrar en confianza previamente con la historia del mismo y, mejor aún, con su epistemología" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 10).

Con respecto a la didáctica del infinito, son numerosas las investigaciones porque sin duda esto es "uno de los temas más comunes, sobre todo porque se

[2] Conjunto infinito se puede definir como: "Un conjunto S se denomina infinito sí y solo sí se puede poner en correspondencia biunívoca con una de sus partes propias" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 97). A esta definición se le da el nombre de Galileo – Dedekind.

[3] Se presentarán dos ejemplos de este hecho en el problema de investigación.

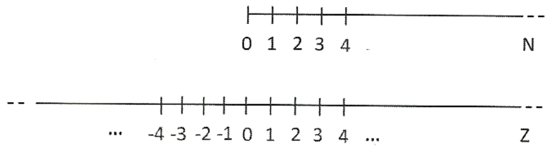
hace evidente, a los ojos de un observador competente, la forma en que el estudiante debe adaptar continuamente diferentes modelos y, en ocasiones, no lo logra” (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 124), modelos que tampoco son desarrollados por los profesores. Por lo tanto, se profundizará sobre las convicciones de los profesores sobre el infinito, haciendo referencia a los trabajos de Arrigo, D’Amore y Sbaragli (2011), las representaciones semióticas de Duval (1995, 2006), Duval y Sáenz-Ludlow (2016) y de D’Amore, Fandiño Pinilla y Iori (2013), los obstáculos epistemológicos y didácticos de Arrigo y D’Amore (1999, 2002) y de Tsamir (2000), y los obstáculos epistemológicos y la perspectiva socio-cultural de la matemática D’Amore, Radford y Bagni (2007).

Por último, se examinará más detalladamente el concepto de convicción para generar una definición más clara y pertinente para los fines de la investigación; actualmente la convicción se aborda desde las concepciones como es propuesto por Azcárate, García y Moreno (2006), quienes señalan que las concepciones de los docentes consisten en la estructura que cada profesor de matemática da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes, y no desde la creencia, que es el modo de conocimiento propio a la opinión (Duval, 2004). Pero es una definición que se debe detallar, a partir de los planteamientos propuestos por Ernest (1988), Grossman, Wilson y Shulman (1992), Ponte (1994), Ruíz-Higueras (1994), Moreno (2001), D’Amore y Fandiño Pinilla (2004), Pehkonen, Ahtee, Tikkanen y Laine (2011) y Bohórquez (2016).

## 3. Problema de investigación

En la práctica docente se evidencian dificultades en los estudiantes respecto a la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos; éstas están asociadas a la misma construcción cognitiva de los estudiantes y la concepción errada de algunos profesores de matemática, causas que ya fueron temas de muchas investigaciones en el pasado, por lo cual nuestra atención se dirige sobre todo a la falta de conciencia semiótica en las representaciones elegidas por los profesores en la enseñanza de los conjuntos infinitos y a las interpretaciones que hacen los estudiantes de estas representaciones, como base de una reflexión crítica por parte de los profesores.

La dificultad que está asociada a la falta de conciencia semiótica sobre las representaciones establecidas en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, se empieza a evidenciar cuando los profesores generan argumentos desde lo que ve en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarias para la conceptualización (Duval, 1993) de los conjuntos infinitos; en este caso el profesor al ver las “siguientes representaciones gráficas habituales que llevan a pensar, tanto a los docentes como a los estudiantes, que el número de enteros es el doble del número de naturales" [o que el conjunto de los enteros tiene más elementos que el conjunto de los naturales]:



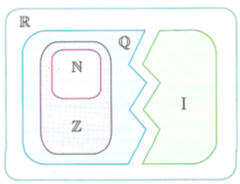

(Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 222).

Examinemos una nueva evidencia de otro profesor; cuando se le pregunta si hay más números pares o números naturales, el profesor responde: "A: (...) todos los números [naturales] 0, 1, 2, 3, … son el doble de los pares, porque faltan los impares" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209), lo que genera el fenómeno de la dependencia, propuesto por Arrigo y D'Amore (1999) al concebir como verdad absoluta el concepto euclidiano "El todo es mayor que la parte"; en este caso vemos nuevamente una problemática con la representación y conceptualización de los conjuntos infinitos, ya que a una mayor longitud del segmento debe corresponder una mayor cardinalidad del conjunto de puntos (Fischbein, 1992, 2001).

Esta dificultad de la conciencia semiótica se agudiza más cuando el profesor al planear y diseñar actividades se encuentra con las siguientes definiciones en los libros de textos.

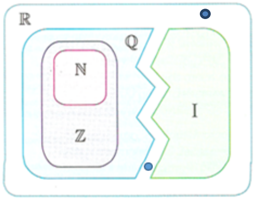
Definición en un libro para grado $8^0$:

> Los números naturales ℕ, los enteros ℤ y los racionales ℚ, conforman, junto con los irracionales I, el conjunto de los números reales ℝ.
> Para entender cómo se relacionan los conjuntos de números mencionados, observemos el siguiente esquema:




(Dueñas Peña, Garavito Ramírez, & Lara De Méndez, 2008, p. 48)

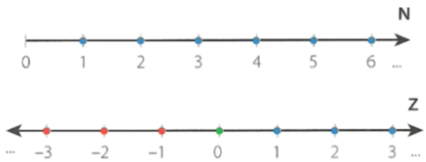
En esta grafica se puede establecer que hay problemas en la representación semiótica que generan la no asociación entre registros de representaciones y a su vez la no asociación de un registro de representación con el objeto matemático (Duval, 1995; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). La definición propuesta se ubica en el registro de la lengua natural, pero los autores presentan también el esquema que se ubica en una representación auxiliar. Y hay una evidente contradicción entre las dos representaciones semióticas.




Se propone un pasaje del registro de la lengua natural a una representación auxiliar; pero se puede observar que, en la representación auxiliar, no se representa lo que se establece en el registro de la lengua natural, ya que si ubicamos una representación hipotética de dos números (puntos evidenciados) en la representación auxiliar donde está la letra ℝ, se puede establecer que en esos lugares los números no pertenecen a ℚ, ni a I, entonces surge la siguiente pregunta: ¿Qué número se representaría en este lugar? Por lo tanto, lo que tenemos en este ejemplo es un problema con la representación auxiliar, la cual no está representando fielmente el objeto matemático de los números reales, en otras palabras, no se está asociando al mismo objeto inaccesible (Duval, 1995, 2006; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016); en este caso no existe una coordinación de registros (Duval, 1995, 2006; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016).

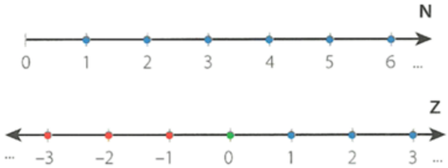
Definición en un libro para grado 11°:

El conjunto de los números naturales lo representamos con N y está formado por los números que se utilizan para contar, es decir, N = {1, 2, 3, …}. A partir de los números naturales es posible construir los números enteros Z agregando el 0 y los negativos de los números naturales. De esta forma obtendremos Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}.
Es posible representar estos números en la recta numérica como muestra la figura:




Al formar todos los posibles cocientes entre números enteros obtenemos el conjunto Q. Entonces $Q = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\right\}$. Los números racionales se caracterizan porque su expresión decimal es finita o infinita periódica. Aquellos números cuya expresión decimal es infinita no periódica forman el conjunto de los números irracionales I. Algunos ejemplos importantes de los números irracionales son: $\pi \approx 3{,}14159\ldots$, $e \approx 2{,}71828\ldots$
Los números reales son el conjunto formado por la unión de los números racionales y los irracionales $R = Q \cup I$. (Moreno Trujillo, Roldán Jiménez, & Romero Morales, 2011, p. 12)

En esta definición, se proponen las siguientes representaciones simbólicas: N = {1, 2, 3, …} y Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}, y la siguiente representación gráfica (la línea de los números naturales y enteros):




En estas dos representaciones se presentan problemas en su representación; en los registros de representación simbólicas solo se presenta por parte de los autores del libro el orden “natural” de los números naturales y de los números enteros, lo que lleva a profesores y estudiantes a pensar que solo hay estas representaciones graficas posibles y correctas del orden de N y de Z, como lo afirma un profesor “estos números tienen que ordenarse siempre así” (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209). Además, puede ser sustentado desde la convicción de algunos profesores cuando dicen que N tiene una sola dirección hacia el infinito, mientras Z tiene dos direcciones, argumento que no es válido y que depende de cómo eliges el orden y de cómo lo representas.

Esta aceptación por parte de los profesores y estudiantes de una sola representación semiótica del orden que se considera único, con sus problemas de interpretación, dejan de lado la representación de otras formas de ordenar los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales. Por ejemplo, un orden del conjunto de los números naturales puede representarse así:
N = {…, 5, 4, 0, 1, 6, 8, …}, N = {0, 3, 7, 2, …}.
Los números enteros se pueden ordenar de las siguientes formas:
Z = {0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, …}, Z = {0, –1, 1, –2, 2, –3, 3, …},
Z = {…, –3, 0, –2, 1, –1, 3, 2, …}, etc.

En estas definiciones, los autores de los libros usan el término de infinito, pero se le deja al profesor, al estudiante o al lector su conceptualización de forma intuitiva. Además, esto se puede evidenciar cuando se presentan la representación de los números naturales y enteros, así: N = {1, 2, 3, 4, 5, …}, Z = {…, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …}, y los ejemplos propuestos de los números racionales e irracionales, así: 5,424424442…, π ≈ 3,14159…, 0,333…

Desde estas representaciones, surgen las siguientes preguntas de reflexión: ¿Cómo los estudiantes interpretan los puntos suspensivos de la representación del conjunto de los números naturales, enteros y de los ejemplos de los números racionales e irracionales?, ¿Qué interpretación tienen los puntos suspensivos para los estudiantes con respecto al infinito?

Con respecto al tema de los conjuntos infinitos, surgen las siguientes preguntas: ¿Qué representación se propone en los libros de texto y en las cátedras de un conjunto infinito?, más aún: ¿Qué papel tiene la representación semiótica en todo esto?, ¿Cómo se pasa de la semiosis a la noesis? y ¿Cómo se puede interpretar en estas circunstancias la paradoja cognitiva de Duval?

A partir de las dificultades que están asociadas a la falta de conciencia semiótica sobre las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos y desde las convicciones presentadas por los profesores de los conjuntos infinitos, se plantea la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo los profesores cambian su convicción sobre la representación semiótica de los conjuntos infinitos a partir de los resultados de entrevistas hechas a estudiantes en las cuales se manifiestan faltas de construcción cognitiva del objeto "conjunto infinito" debido a las elecciones semióticas del profesor mismo?

## 4. Descripción de la metodología

Este trabajo se encuentra enmarcado en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-comparativo, entendiendo el sentido de la primera como la que "describe características de un conjunto de sujetos o áreas de interés" (Tamayo, 2001, p. 66) y de la segunda como: "la actividad de la razón que ponen en correspondencia unas realidades con otras para ver sus semejanzas y diferencias" (Sierra Bravo, 1994, p. 161). Desde estas perspectivas, se pretende identificar, describir y analizar las causas del cambio de convicción de los profesores relativo a la elección de representaciones en la enseñanza de los conjuntos infinitos a través de entrevistas hechas a sus estudiantes, ya que éstas permiten comparar las realidades de lo aprendido por parte de los estudiantes y lo enseñado por parte de los profesores del objeto matemático conjuntos infinitos a partir de la elección de representaciones.

Para establecer las causas del cambio de convicción de los profesores, se tendrá en cuenta la siguiente opción metodológica:

1. Se observará y grabará la elección de las representaciones semióticas utilizadas por el profesor para la enseñanza de los conjuntos infinitos (objeto matemático profesor) y se comparará con el objeto matemático conjunto infinito que es construido y declarado por los estudiantes en su entrevista.
2. A partir de la comparación, se tomarán las frases y fragmentos de video de las respuestas de los estudiantes, que evidencien la no construcción cognitiva del objeto matemático conjunto infinito a partir de la elección de representaciones semióticas propuestas por el profesor.
3. En la entrevista al profesor, se le harán preguntas relacionadas a esta elección de representaciones semióticas para la enseñanza de los conjuntos infinitos y se le mostrarán las respuestas de los estudiantes (fragmentos de video y frases), a partir de estas dos acciones en la entrevista, es que se pueden evidenciar las posibles causas del eventual cambio de las convicciones de los profesores sobre las representaciones semiótica

utilizada para la enseñanza de los conjuntos infinitos.

## 5. Hipótesis

La conjetura que se establece para esta investigación es la conceptualización de los conjuntos infinitos por parte de los estudiantes, a partir del conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática (conciencia semiótica) generado por el profesor y que se evidencia en la elección de las representaciones utilizadas para la enseñanza y aprendizaje los conjuntos infinitos.

## 6. Conclusiones

Estos problemas que se presentan en las representaciones, aunque hayan sido evidenciados por las investigaciones en didáctica de la matemática, se siguen presentando con profesores que actualmente están en ejercicio y en formación; por lo tanto, es muy importante generar un cambio en la conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Se destaca como elemento importante en la relación con las problemáticas semióticas de la representación semiótica de los conjuntos infinitos, el estudio y análisis crítico que se debe realizar a los registros de representación semiótica en los textos escolares y universitarios, y a las prácticas docentes al enseñar los conjuntos infinitos, ya que: "la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento (...) están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica" (Duval, 1995, p. 18).

Los resultados que se esperan de esta investigación son: a) caracterizar los diferentes registros semióticos de representación de los conjuntos infinitos a partir de las prácticas docentes, b) justificar la elección del profesor sobre los diferentes registros semióticos utilizados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos y c) evidenciar la necesidad de actualización de los profesores respecto a la didáctica del infinito y específicamente de las representaciones semióticas de los conjuntos infinitos.

## Referencias bibliográficas

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo": Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5–24.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación matemática*, *16*(2), 5–20.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Magisterio].

Azcárate, C., García, L., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 85–116.

Bohórquez, L. Á. (2016). *Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemáticas sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas*. (Tesis doctoral laureada en curso de publicación, director Bruno D'Amore). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York, NY: Wiley. [Versión en idioma español: Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial].

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*, 11, 63–71.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*, 58, 23–44.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección Seminario en Educación de la Universidad Nacional de Colombia (Vol. 10). Bogotá: Corcas Editores Ltda.

Dueñas Peña, W. H., Garavito Ramírez, A. A., & Lara De Méndez, G. E. (2008). *Aciertos matemáticos 8: Serie para educación básica secundaria*. Bogotá: Educar Editores S.A.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(4), 385–414.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [Versión en idioma español: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle].

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, P. (1988). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249–254). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Fishbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. En E. Fischbein, G. Vergnaud, & B. D'Amore (Eds.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 1–24). Bolonia, Italia: Pitagora.

Fishbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 309–329.

Fishbein, E., Tirosch, D., & Hess, P. (1979). The intuitions of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3–40.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23–36). Oxford, Inglaterra: Pergamon Press.

Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics* (Vols. I, II). Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.

Moreno, L., & Walddeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231.

Moreno, M. M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales* (Tesis doctoral). Bellaterra, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno Trujillo, J. F., Roldán Jiménez, D. G., & Romero Morales, F. E. (2011). *Matemáticas para pensar 11*. Bogotá: Editorial Norma S.A.

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P., & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions on mathematics lessons revealed via their drawings. En B. Rösken & M. Casper (Eds.), *Current state of research on mathematical beliefs XVII: Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 182–191). Bochum, Alemania: Universidad Ruhr de Bochum.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. I, pp. 195–210). Lisboa, Portugal.

Ruíz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Granada, España: Universidad de Granada.

Sierra Bravo, R. (1994). *Técnicas de investigación social: Teoría y ejercicios*. Madrid, España: Paraninfo.

Tamayo, M. (2001). *El proceso de la investigación científica.* Ciudad de México, México: Limusa.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, *14*(2), 167–207.

# Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática

**Henry Alexander Ramírez Bernal**
*Doctorado en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
*Grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia*
*NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Universidad de Bologna, Italia*

**Abstract.** *This paper summarizes a PhD research in development which aims to characterize the possible changes in the conceptions of a group of mathematics teachers of the first semesters of university on the causes of the errors (of their students). The discussion and reflection between teachers in focus groups and individual interviews in relation to theoretical referents (presented by the researcher) may help to explain the possible causes of the error in mathematics of their students, by seeking to promote the change of their conceptions about the nature of the error.*

*Keywords:* obstacle, misconception, didactic contract, conversion, treatment, Duval's cognitive paradox, change of conceptions.

**Sunto.** *In questo articolo si sintetizza una ricerca dottorale in corso il cui scopo principale è di caratterizzare i possibili cambi di concezioni di un gruppo di professori di matematica dei primi semestri di università circa le cause degli errori (dei propri studenti). Si auspica che la discussione e la riflessione fra professori in focus group e le interviste individuali relative a referenti teorici (presentati dal ricercatore) possano aiutare a spiegare dal punto di vista della didattica della matematica le possibili cause dell'errore in matematica degli studenti, potendo arrivare a realizzare un cambio nelle convinzioni sulla natura di tali errori.*

*Parole chiave:* ostacolo, misconcezione, contratto didattico, conversione, trattamento, paradosso cognitivo di Duval, cambio di concezioni.

**Resumen.** *En el presente artículo se sintetiza una investigación doctoral en desarrollo cuyo propósito fundamental es caracterizar los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores (de sus estudiantes). La discusión y reflexión entre profesores en grupos focales (focus group) y entrevistas individuales en relación a referentes teóricos (presentados por el investigador) pueden ayudar a explicar las posibles causas del error en matemática de sus estudiantes, tratando de promover el cambio de sus concepciones sobre la naturaleza del error.*

*Palabras clave:* obstáculo, misconcepción, contrato didáctico, conversión, tratamiento, paradoja cognitiva de Duval, cambio de concepciones.

## 1. Premisa

La investigación doctoral está motivada fundamentalmente por el interés del autor en profundizar en el estudio de la forma como el profesor universitario concibe los errores de sus estudiantes en matemática, cómo explica sus posibles causas, cómo las aborda en sus aulas de clase y cómo se puede contribuir a mejorar la comprensión de la naturaleza del error, gracias a herramientas traídas de la didáctica de la matemática, por parte de los docentes. El conocimiento de las causas del fracaso de los estudiantes en matemática puede proporcionar al docente herramientas para ayudar a mejorar el desempeño de sus estudiantes, lo cual es coherente con lo propuesto por Brodie (2014) quien resalta la importancia de profundizar en la investigación en educación matemática sobre los errores del alumno y en cómo los maestros pueden aprender a identificar y comprometerse con el razonamiento detrás de estos errores. Algunas investigaciones han mostrado que los profesores de matemática explican en muchos casos las causas de los errores de sus estudiantes a partir de ideas ingenuas y banales, esto es, sustentándolas en creencias y concepciones que distan de las explicaciones que se proponen desde la investigación en didáctica de la matemática. La investigación doctoral pretende profundizar en la comprensión de los posibles cambios en las concepciones sobre las causas del error que se pueden producir en un grupo de profesores de matemática de primeros semestres de universidad mediante escenarios de discusión y reflexión crítica en relación a referentes teóricos propuestos desde la didáctica de la matemática que intentan explicar las causas del error en matemática; este estudio se enmarca de forma pertinente en la comprensión de cómo pueden aprender los profesores de matemática, ubicándose por tanto en una línea de investigación sobre la formación de profesores a nivel universitario.

## 2. Marcos teóricos

### *2.1. El estudio del error en el aprendizaje de la matemática*

Diversas nociones propuestas desde la didáctica de la matemática contribuyen a explicar las posibles causas de los errores en matemática de los estudiantes: obstáculo, dificultad, misconcepción, contrato didáctico, representaciones semióticas y paradoja cognitiva de Duval.

Para D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli (2010) el *error* en matemática es sólo la manifestación de un malestar cognitivo. Brousseau (1983) considera que el error no es necesariamente y sólo un resultado de la ignorancia, la incertidumbre y el azar, sino que es resultado de un conocimiento previo el cual fue exitoso, pero que ahora es erróneo o simplemente no es aplicable. Adicionalmente Brousseau (2001) señala que en didáctica de la matemática los errores son específicos de un conocimiento y/o de una situación matemática, son inherentes al proceso de aprendizaje y al proceso de enseñanza; el maestro debe combinar un nivel de riesgo de error soportable y una probabilidad suficiente de beneficio de él. Para Brousseau los errores en matemática se vinculan con el concepto de obstáculo enfatizando en el análisis epistemológico y en el estudio histórico de las ideas matemáticas.

Los *obstáculos* pueden considerarse como cualquier cosa que se interpone al aprendizaje en la dirección docente-estudiante, no son necesariamente falta de conocimiento y a veces son expresiones de conocimiento (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010); en opinión de estos autores, el estudiante utiliza este conocimiento para dar respuesta adecuada en un contexto conocido encontrado en precedencia pero puede fracasar cuando lo usa fuera de ese contexto, generando respuestas incorrectas. Los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden ser de carácter ontogenético, didáctico o epistemológico (Brousseau, 1976). Las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes dentro del proceso de enseñanza definen los *obstáculos ontogenéticos* (Artigue, 1990); la elección de un determinado proyecto o sistema educativo por parte del docente pueden determinar *obstáculos didácticos* (Brousseau, 1976); los *obstáculos epistemológicos* de acuerdo a Brousseau (1976) son constitutivos del conocimiento en que se apuntan y se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos.

Godino, Batanero y Font (2003) señalan que el término *dificultad*:

> indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. (p. 69)

La dificultad en matemática puede asumir por lo menos tres sentidos distintos como lo indican D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010): la dificultad en matemática del estudiante, la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática. Fandiño Pinilla (2010) propone cinco tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones, que contribuyen a analizar diversos componentes del aprendizaje matemático: conceptual o noético, algorítmico, estratégico, comunicativo y aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

En el proceso de aprendizaje matemático se pueden generar conceptualizaciones erróneas que de perdurar obstaculizan la comprensión matemática, dando lugar a *misconcepciones*.[1] Silver (1985) vincula

[1] De acuerdo con D'Amore y Sbaragli (2005) el término *misconcepción* ha sido usado por décadas en la investigación en educación matemática e interpretado usualmente con connotaciones exclusivamente negativas, como juicio erróneo, idea equivocada, equívoco o malentendido y también en un sentido más extenso como concepción falaz. La palabra *misconcepción* del idioma español se considera en este documento como equivalente a la palabra inglesa *misconception* y al término en italiano *misconcezione*. Pero el sentido dado per estos dos autores es muy diferente, pues pierde el carácter totalmente negativo.

fuertemente las misconcepciones con las creencias erróneas; Schoenfeld (1985) señala que los estudiantes pueden desarrollar algunas concepciones incorrectas, particularmente en relación con los procedimientos. En contraste, D'Amore (1999, como se cita en D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010, p. 78) propone un sentido constructivo para definir el término *misconcepción* señalando que es sí un concepto erróneo, el cual constituye un acontecimiento que debe evitarse al final de los estudios; para D'Amore pero no debe verse como una situación del todo negativa: para lograr la construcción de un concepto puede ser necesario pasar a través de una misconcepción momentánea.

El contrato didáctico, de acuerdo con Alagia, Bressan y Sadovsky (2005), incorpora al análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática "un aspecto esencial: la intención de que el alumno aprenda un saber cultural, intención que tiene el docente y que necesariamente el alumno debe compartir" (p. 37). El interés original de Brousseau (2007) por las causas del fracaso electivo en matemática y que se ubican en la relación del alumno con el saber y con las situaciones didácticas y que no estarían ligadas con sus aptitudes u otras características, originó la noción de contrato didáctico. El contrato didáctico para Brousseau (1986, como se cita en D'Amore, 2005) está constituido por los hábitos específicos del profesor esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el profesor que ocurren en una situación de enseñanza preparada y realizada por el maestro. D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy (2010) presentan una visión crítica y moderna sobre el contrato didáctico. Algunos efectos que se desprenden de la noción de contrato didáctico contribuyen a explicar las causas de algunas tipologías de errores en el aprendizaje matemático.[2]

El trabajo matemático se realiza con representaciones semióticas de los objetos matemáticos dado que es imposible acceder a los objetos matemáticos directamente, lo cual implica fuertes dificultades en el aprendizaje,[3] como se sintetiza en la paradoja cognitiva de Duval (Duval, 1993). La comprensión del funcionamiento de las representaciones semióticas implica el estudio de sus transformaciones (tratamiento y conversión). Para Duval (2006) estas transformaciones están en el corazón de la actividad matemática y su diferenciación constituye el primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión matemática de los estudiantes. Tanto la conversión (Duval, 2006) como el tratamiento (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Rojas, 2014; Santi, 2010) son fuente de fuertes dificultades en el aprendizaje matemático.

---

[2] Entre estos efectos se pueden citar (Brousseau, 2007): el efecto Topaze, el efecto Jourdain, los deslizamientos metacognitivos y metadidácticos, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de las situaciones de enseñanza.

[3] Lo cual es coherente con la dificultad analizada en el sentido del aprendizaje semiótico propuesto por Fandiño Pinilla (2010).

### 2.2. Las concepciones y creencias sobre las causas del error en matemática

Las creencias y concepciones de los profesores sobre la matemática y su aprendizaje están fuertemente ligadas con su enseñanza. Las creencias pueden considerarse como verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, que se derivan de la experiencia o de la fantasía y que tienen un fuerte componente evaluativo y afectivo (Pajares, 1992). “No se fundamentan en la racionalidad sino sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo” (Moreno & Azcárate, 2003, p. 67). Las creencias permean e influyen en la relación de los individuos con la matemática; Schoenfeld (1992, como se cita en: Pehkonen & Törner, 1999) señala que las creencias son comprensiones y sentimientos que dan forma a la manera en que un individuo conceptualiza y se involucra con el conocimiento matemático; García, Azcárate y Moreno (2006) presentan algunas características de las creencias del profesor: se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno.

Algunos investigadores señalan que las concepciones tienen un mayor nivel de racionalidad, elaboración cognitiva y de consciencia en comparación con las creencias. Para García, Azcárate y Moreno (2006) las concepciones “consisten en la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes” (p. 87). Estos autores adicionalmente caracterizan algunas de las concepciones del profesor: forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. D’Amore (2008) define epistemológicamente la concepción como:

> un conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas. (p. 2)

Se asume en este trabajo el sentido de racionalidad y elaboración cognitiva de las concepciones a diferencia de las creencias que no se sustentan en la racionalidad (Brousseau, 2001).

## 3. Problema de investigación

Gagatsis y Kyriakides (2000) han señalado que el interés en el estudio del error condujo a la formación de diversas teorías sobre la naturaleza de los errores matemáticos, su interpretación y formas de superarlos. En estos referentes teóricos se abordan aspectos epistemológicos, semióticos y didácticos entre otros, los cuales intentan desde hace años y en diferentes direcciones explicar las causas reales de estos errores. En contraste, estudios de algunos autores como Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) y de Ramírez (2013) han sugerido que los profesores presentan explicaciones sobre las causas de los errores en matemática de sus estudiantes que se distancian de estos referentes teóricos y de investigación; tales explicaciones están vinculadas con creencias y concepciones a veces ingenuas de los profesores, de tal forma que éstas influyen negativamente en la forma como los profesores conciben las causas del error en matemática.

Por otra parte, el profesor puede y debe ayudar al estudiante a mejorar su desempeño en matemática, lo cual implica ayudarle a superar sus errores. Es conveniente por tanto que el profesor de matemática profundice en la comprensión de la naturaleza del error como lo han señalado Ball, Thames y Phelps (2008); según estos autores, los profesores deben ser capaces de analizar las verdaderas causas de los errores matemáticos de manera eficiente y fluida; Borasi (1987) y Brodie (2014) coinciden en llamar la atención sobre el potencial del error como una posible vía para que el profesor pueda acceder al pensamiento de los estudiantes en su forma de hacer matemática. Si la forma en que el profesor de matemática aborda durante su ejercicio profesional los errores en el aprendizaje matemático está privilegiadamente influida por creencias y concepciones ingenuas o distantes de las explicaciones teóricas sobre estos errores y sus causas, difícilmente podrá realizar una gestión efectiva en el aula para mejorar la comprensión de sus estudiantes. La posibilidad de que los profesores modifiquen sus concepciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje en matemática al tomar consciencia de la necesidad de explicaciones más elaboradas (sustentadas por ejemplo en referentes teóricos propuestos en didáctica de la matemática), y que disten cada vez más de explicaciones ingenuas, podría contribuir favorablemente en su práctica de enseñanza. Lo anterior es coherente con el hecho que las creencias de los profesores tienen un fuerte impacto en las prácticas de enseñanza (Ernest, 1989). De acuerdo con Lerman (1999) en el corazón de la investigación sobre las creencias de los profesores se encuentra el argumento que las creencias y las concepciones de los profesores o los estudiantes para profesor deben cambiar para que cambien su enseñanza, la forma de evaluar los errores y la forma de poner en marcha acciones que ayuden a los estudiantes. En un sentido similar se han expresado recientemente otros autores como Bobis, Way, Anderson y Martin (2016) quienes señalan la importancia de desarrollar una mejor comprensión de los conocimientos y creencias de los profesores sobre la participación de los estudiantes (en matemática), incluyendo cual es la mejor forma de modificar estas creencias y mejorar sus conocimientos a fin de influir de manera más positiva sus prácticas de enseñanza.

Para Pehkonen (1999, 2006) un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre ellas se produce aprendizaje, de tal forma que la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir. Las investigaciones han evidenciado que las concepciones de los profesores pueden cambiar y en qué condiciones se producen tales cambios (Pehkonen, 1999, 2006). En contraste con la idea que cambios sustantivos en los profesores son concebidos generalmente como procesos graduales, complejos y difíciles (Guskey, 2003; como se cita en Bobis, Way, Anderson, & Martin, 2016), algunos autores como Liljedahl (2010) han notado cambios rápidos y profundos en las creencias y prácticas de los profesores, en varias circunstancias.

## 4. Pregunta de investigación

Lo presentado en el apartado anterior da sustento a los propósitos de la investigación doctoral, en la cual se busca profundizar en la comprensión, descripción y caracterización de los posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores (en ejercicio) de matemática de primeros semestres de universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes. Se propone una intervención en la que se promueve la reflexión crítica, el debate y la discusión por parte de los profesores participantes. La intervención es realizada por el investigador quien presenta a los profesores la teoría de obstáculos y la teoría de representaciones semióticas como referentes teóricos y de investigación que ayudan a explicar unas posibles causas de algunos errores provenientes de diversas fuentes (como su propia práctica y de la literatura especializada). La reflexión crítica se desarrolla en dos escenarios: mediante discusiones orientadas en grupos focales (focus group) y mediante entrevistas personales con el investigador. La información obtenida debe permitir realizar un análisis de corte cualitativo descriptivo para responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la matemática se producen a partir de una reflexión crítica (sustentada en la teoría de obstáculos y teoría de las representaciones semióticas de Duval) sobre el análisis de los errores de sus estudiantes?

## 5. Metodología de investigación

Para responder la pregunta de investigación doctoral, se propone un estudio cualitativo con un enfoque descriptivo; en un estudio cualitativo se busca explorar, descubrir, construir y describir a través de una gran lente, examinando el alcance y profundidad de los fenómenos con el propósito de aprender más sobre ellos (Johnson & Christensen, 2008) y se analiza la realidad subjetiva indagando en los significados personales, las construcciones personales o sociales del conocimiento, se privilegia del estudio de los individuos y sus contextos particulares y se busca comprender lo subjetivo y dar sentido al mundo (Ernest, 1998). Se considera adicionalmente la noción de *teoría* presentada por Radford (2008), dada su pertinencia para la investigación en educación matemática. Radford (2008) sugiere que una teoría puede ser vista como una manera de producir comprensiones y vías de acción basadas en: un sistema *P* de principios básicos (el cual incluye visiones implícitas, declaraciones explícitas que delimitan el universo del discurso y perspectivas de investigación adoptadas), una metodología *M* (que incluye técnicas de recolección e interpretación de datos soportados por *P*) y un conjunto *Q* de preguntas paradigmáticas de investigación. De acuerdo con Radford (2008) las teorías se pueden concebir "como organizadas (implícita o explícitamente) de acuerdo con tres componentes principales (*P, M, Q*)" (p. 321) de tal forma que éstos se interrelacionan de formas específicas.

Las estrategias e instrumentos de recolección de la información para el estudio deben permitir evidenciar las concepciones de los profesores sobre las causas del error en matemática (de sus estudiantes) y sus posibles cambios a través de sus respuestas y explicaciones.

Inicialmente se envía a unos profesores una carta de invitación (individual) a participar al grupo de profesores convocados. En esta carta adicionalmente se les solicita que identifiquen algunos errores en matemática de sus estudiantes y propongan posibles explicaciones para sus causas. A partir de los resultados de esta fase indagatoria se selecciona un grupo de profesores que será invitado a participar en las sesiones de trabajo y discusión en focus group y en entrevistas individuales.[4] La carta de invitación a participar se envía por correo electrónico y en algunos casos se entrega personalmente. En el transcurso de las entrevistas y los focus group, el investigador aprovecha los escenarios de diálogo, discusión y debate para presentar y explicar a los profesores algunas nociones de la teoría de obstáculos y de la teoría de representaciones semióticas de Duval, las cuales muy probablemente ellos no conocen. Se busca aprovechar las reacciones de los profesores al descubrir que los investigadores en el marco de la didáctica de la matemática han estudiado los obstáculos y las representaciones semióticas para explicar unas causas de los errores matemáticos de los estudiantes. Lo anterior permite al investigador brindar a los participantes un instrumento de reflexión y estudio sobre las causas del error en matemática; se considera que este instrumento podrá permitir a algunos profesores analizar y tratar de explicar los errores de sus

[4] En párrafos posteriores se describen las entrevistas y los focus group.

estudiantes desde una nueva e interesante óptica que toma distancia de explicaciones triviales.

De acuerdo con Wilkinson (2004) – como se cita en Onwuegbuzie, Dickinson, Leech, & Zoran, 2009 – un *grupo focal* o *focus group* es una forma de recolectar datos cualitativos, la cual esencialmente implica la participación de un pequeño número de personas en un grupo de discusión informal centrado en un tema o en un conjunto de temas específicos. Fontana y Frey (1994) afirman que las entrevistas grupales pueden proporcionar "otro nivel de recopilación de datos o perspectiva sobre el problema de investigación no disponible a través de entrevistas individuales" (p. 364). Freeman (2006) indica que el propósito fundamental de los grupos focales es establecer creencias, actitudes y sentimientos de los entrevistados por la exploración de los procesos grupales.

Las sesiones de focus group se desarrollan siguiendo algunas de las recomendaciones presentadas en Onwuegbuzie, Dickinson, Leech y Zoran (2009): sesiones de entre una y dos horas de duración, grupos focales de tres o cuatro participantes, tres o cuatro grupos focales pues esta multiplicidad ofrece ventajas al investigador para identificar en qué punto ocurre la saturación tanto de datos como teórica, y se considera la posibilidad de conformar un equipo de apoyo que cumpla con el rol de equipo moderador.

Como estrategia complementaria se propone la realización de entrevistas semiestructuradas cuyo propósito es el de profundizar sobre la información obtenida en los focus group (en los casos que sea necesario) y contribuir a la triangulación de la información. El tipo de entrevista propuesto es individual y en profundidad pues como lo indican Bonilla y Rodríguez (1997): "Las entrevistas individuales en profundidad son el instrumento más adecuado cuando se han identificado informantes o personas claves dentro de la comunidad" (p. 93).

El análisis de la información se realiza siguiendo una codificación abierta, categorización y saturación teórica (Johnson & Christensen, 2008); la información se organiza a través de matrices de análisis que permitan la emergencia de categorías que den cuenta de las creencias y concepciones de los profesores y sus cambios, aproximación para el estudio de las concepciones utilizada por Pehkonen (1999). Las evidencias de los cambios de concepciones sobre las causas del error en el aprendizaje de la matemática se podrán identificar, describir y caracterizar siguiendo el esquema de análisis propuesto por D'Amore y Fandiño Pinilla (2004) según el cual el investigador relaciona concepciones precedentes (P) con concepciones sucesivas (S), interpretando los posibles cambios. Se considera adicionalmente el uso de mapas cognitivos propuestos por Jones (1985) – como se cita en Llinares (1992) – que permiten representar gráficamente los sistemas de creencias de una persona.

## 6. Hipótesis de respuesta

Se espera que, como resultado de las discusiones y reflexiones, algunos de los profesores participantes cambien o al menos evidencien indicios de cambio en sus concepciones sobre las causas del error en matemática de sus estudiantes reconociendo los referentes teóricos que ayudan a comprender su naturaleza y los incorporen a sus análisis sobre las causas del error. Como investigador, se espera que el componente científico presente en este proceso de reflexión y discusión permitirá a algunos de estos profesores alejarse del carácter subjetivo de sus creencias sobre el error en matemática para dar paso a construcciones y explicaciones de mayor elaboración cognitiva que generen cambios en sus creencias y enriquezcan sus concepciones sobre el error en matemática.

## 7. Conclusiones

A pesar de los muchos esfuerzos realizados en didáctica de la matemática para explicar las causas posibles del error en matemática, aún es evidente que un buen porcentaje de profesores universitarios desconocen los resultados de investigación y los referentes teóricos con los que se intentan explicar las causas de tales errores; en el estudio de Ramírez (2013) al indagar con profesores universitarios de matemática sobre las causas del error de sus estudiantes, ellos las atribuían a hechos como falta de concentración o lectura deficiente. Sin embargo en ese mismo estudio se pudieron encontrar algunos indicios de reflexión de algunos de profesores que durante las entrevistas se cuestionaban sobre la naturaleza del error: cuando algunos profesores se enfrentan a la posibilidad de reflexionar críticamente sobre las causas del error en matemática tomando en consideración referentes teóricos y de investigación, muestran una cierta sensibilidad que denota posibilidades de cambio de sus concepciones frente a este aspecto del aprendizaje matemático.[5]
Cambios de concepciones de los profesores de matemática pueden contribuir a enriquecer y fortalecer su ejercicio profesional. En la investigación doctoral propuesta se busca profundizar en el estudio de una forma posible de formación de profesores universitarios de matemática por medio de un escenario de discusión (focus group) entre pares que permita el diálogo y la discusión en torno a un tema de su particular interés: la causa del error en matemática, aprovechando el potencial de algunas nociones teóricas como obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, misconcepciones, contrato didáctico, transformaciones semióticas de tratamiento y conversión y paradoja cognitiva de Duval.

[5] También existen *infortunadamente* casos en los cuales los profesores no están dispuestos a modificar sus concepciones.

## Referencias bibliográficas


Alagia, H., Bressan, A. M., & Sadovsky, P. (2005). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 241–286.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(1), 33–55.

Bonilla, E., & Rodríguez, P. (1997). *Más allá del dilema de los métodos: La investigación en ciencias sociales* (2ª ed.). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 2–8.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 221–239.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En W. Vanhamme & J. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement de la mathématique: Comptes rendus de la XXVIII^e rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101–117). Louvain-la-Neuve.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 164–198.

Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques: Etudes dans le cadre de la théorie des situations didactique. *Petit x*, 57, 5–30.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Charnay, R. (1989). Les enseignants de mathématiques et les erreurs de leurs élevés. *Grand N*, 45, 31–41

D'Amore, B. (1999). *Didattica della matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora. [Edición en español: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio].

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática.* Barcelona: Reverté.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, culture and mathematical thinking* [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 177–195.

D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática), 17*(1), 87–106. Recuperado de https://rsddm.dm.unibo.it/articoli-di-ricerca-e-diffusione/182-2/

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria superior. *Epsilon*, 58, 23–44.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Latinoamericana de*

*Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 10*(1), 39–68.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica: Alcuni effetti del "contrato"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri. [En curso de impresión en idioma español, Bogotá, Colombia: Magisterio].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143–168.

Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students' errors. En G. Philippou, C. Christou, & A. Kakas (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education* (pp. 383–400). Nicosia: Sighroni Epoxi.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics teaching: The state of art* (pp. 249–254). London, UK: Falmer Press.

Ernest, P. (1998). The Epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. En A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (pp. 22-39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Fontana, A., & Frey, J. (1994). Interviewing: The art of science. En Y. S. Lincoln & N. K. Denzin (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research* (pp. 361–376). Thousand Oaks: Sage Publications.

Freeman, T. (2006). 'Best practice' in focus group research: Making sense of different views. *Journal of advanced nursing*, *56*(5), 491–497.

Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*(1), 24–58.

García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 9*(1), 85–116.

Godino, J. D., Batanero, M., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Guskey, T. R. (2003). What makes professional development effective? *Phi Delta Kappan, 84*(10), 748–750.

Jones, S. (1985). The analysis of depth interviews. En R. Walker (Ed.), Applied qualitative research (pp. 56–70). Aldershot, Hants, Reino Unido: Gower Publishing Company Limited.

Johnson, C., & Christensen, L. (2008). *Educational research: Quantitative, qualitative and mixes approaches* (3a ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 66–72). Duisburg, Alemania: Gerhard Mercator University.

Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(5), 411–423.

Llinares, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. En C. Marcelo García (Ed.), *La investigación sobre la formación del profesorado: Métodos de investigación y análisis de datos* (pp. 57–95). Buenos Aires, Argentina: Cincel.

Milhaud, N. (1980). *Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves* (Master's thesis). Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21*(2), 265–280.

Onwuegbuzie, A. J., Dickinson, W. B., Leech, N. L., & Zoran, A. G. (2009). A qualitative framework for collecting and analyzing data in focus group research. *International Journal of Qualitative Methods*, *8*(3), 1–21.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, *62*(3), 307–332.

Pehkonen, E. (1999). Conceptions and images of mathematics professors on teaching mathematics in school. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(3), 389–397.

Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En L. Häggblom, L. Burman, & A.-S. Röj-Lindberg (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist* (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagoiska fakulteten, Specialutgåva.

Pehkonen, E., & Törner, G. (1999). Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research. En E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109 – 117). Duisburg: Gerhard Mercator University.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática: Análisis epistemológico, semiótico y didáctico* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos* (Tesis de Doctorado, Director Bruno D'Amore). Bogotá, Colombia: Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de http://die.udistrital.edu.co/publicaciones

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: A comparison between semiotic perspectives* (Tesis de Doctorado, Director Bruno D'Amore). Palermo, Italia: Università di Palermo. Recuperado de https://rsddm.dm.unibo.it/ph-d/

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wilkinson, S. (2004). Focus group research. En D. Silverman (Ed.), *Qualitative research: Theory, method, and practice* (pp. 177–199). Thousand Oaks, CA: Sage.

# Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity

**Luis Radford**
*Université Laurentienne, Canada*

**Abstract.** *The goal of this article is to contribute to the ongoing discussion about the meaning, growth, connectivity, and affinity of theories in mathematics education. In the first part of the article, I articulate a systemic view of theory in mathematics education. In the second part, I discuss the problem of the growth and connectivity of theories; then I introduce the idea of affinity between theories. The article rests on the idea that connecting theories and the investigation of the affinity between theories are important endeavors not only to those who are directly involved in this new disciplinary field but also to all mathematics educators. Indeed, the practice of connecting theories or the investigation of the affinities between two or more theories helps us to elucidate what theories are. For instance, to connect different research traditions, participants must make clear the ideas, principles, and assumptions of their own theoretical approaches.*

*Keywords:* theories in mathematics education, theoretical principles, methodology, research questions, connectivity, affinity.

**Sunto.** *L'obiettivo di questo articolo è quello di contribuire alla discussione in corso circa il significato, la crescita, la connessione e l'affinità delle teorie in didattica della matematica. Nella prima parte dell'articolo si fornisce una visione sistematica del concetto di teoria in didattica della matematica. Nella seconda parte si discute il problema della crescita e della connessione tra le teorie; poi si introduce l'idea di affinità tra le teorie. L'articolo si basa sull'idea che la connessione tra le teorie e la ricerca di una loro affinità siano importanti sforzi non solo per coloro che sono direttamente coinvolti in questo nuovo campo disciplinare, ma per tutti gli educatori di matematica. In effetti, la pratica di connettere teorie o di indagare le affinità tra due o più teorie ci aiuta a chiarire che cosa intendiamo per "teoria". Per esempio, per collegare diverse tradizioni di ricerca, i partecipanti devono chiarire le idee, i principi e le assunzioni dei loro approcci teorici.*

*Parole chiave:* teorie in didattica della matematica, principi teorici, metodologia, domande di ricerca, connettività, affinità.

**Resumen**. *El propósito de este artículo es contribuir a la discusión en curso sobre lo que se puede entender por desarrollo, conexión y afinidad de las teorías en educación matemática. En la primera parte del artículo se ofrece una visión sistemática del concepto de teoría en educación matemática. En la segunda parte se propone una discusión alrededor del problema del desarrollo y de la conexión entre teorías; a este punto se introduce la idea de afinidad entre estas. El artículo se basa en la idea de que la conexión entre las teorías y la búsqueda de sus afinidades es una* *actividad de gran importancia no sólo para quienes están directamente involucrados en este nuevo sector disciplinar, sino también para todos los educadores de matemática. De hecho, la práctica de conectar teorías o investigar las afinidades entre dos o más teorías nos ayuda a entender la acepción de "teoría". Por ejemplo, en el proceso de vincular diferentes tradiciones en la investigación, se requiere que los participantes hagan explícitas las ideas, los principios y las suposiciones de sus enfoques teóricos.*

*Palabras clave:* teorías en didáctica de la matemática, principios teóricos, metodología, preguntas de investigación, conectividad, afinidad.

## 1. Introduction

The past few decades have been witness to the emergence of a number of approaches to, or theories of, mathematics education—e.g., the ontosemiotic approach (Godino, Batanero, & Font, 2007), socioepistemología (Cantoral, 2013), mathematical working spaces (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016), enactivism (Reid & Mgombelo, 2015), the theory of joint action (Sensevy, 2011), and inferentialism (Noorloos, Taylor, Bakker, & Derry, 2017) to mention a few only. As a result, there has been an attempt to understand the differences and similarities that may exist among theories in mathematics education. Arguably, one of the most important efforts that have been made in this context is the one that investigates whether or not two or more theories can be put into contact with one another, how, and to what extent (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014). The "connectivity" or "networking" of theories and the ensuing research practice of "connecting" them depends, of course, on what we mean by a theory in mathematics education in the first place. Naturally, the question about what a theory is in mathematics education has been asked, directly or indirectly, by many math educators—for instance, Niss (1999), Sierpinska and Lerman (1996), and Sierpinska and Kilpatrick (1998).

The goal of this article is to contribute to the ongoing discussion about the meaning, growth, connectivity, and affinity of theories in mathematics education. The article rests on the idea that connecting theories and the investigation of the affinity between theories are important endeavours not only to those who are directly involved in this new disciplinary field but also to all mathematics educators. Indeed, the practice of connecting theories helps us to elucidate what theories are. For instance, to connect different research traditions, participants must make clear the ideas, principles, and assumptions of their own theoretical approaches.

The encounter with other theoretical approaches also offers participants the opportunity to recognize theoretical similarities and differences and to inquire as to what extent two or more approaches are opposed, similar, compatible, and so on.

## 2. Theory

I would like to start by going back to the etymology of the term theory. The word "theory" stems from the Greek verb *theōrein*, which comes from the merging of two root words, *thea* and *horaō*.

*Thea* (from which the term "theatre" derives) is the outward aspect in which something shows itself—what Plato called *eidos*.

The second root word in theōrein, horaō, means to look at something attentively. Thus, it follows, as Heidegger (1977) suggested, that theōrein or theory is a form of seeing, to look at something attentively and to make it reveal itself to us through the spectacle of its appearance.

As we can see, a theory in the Greek sense is a kind of contemplative act. It is something to help us make sense of something already out there, by looking at it attentively. Classifications, like the botanical ones carried out by Aristotle, were the tools with which to do that. Finding the genus and its variants was the method used to ascertain the limits of the species. But, in this line of thought, the observed objects were not forced to appear. They were there, accessible to be collected and inspected. We have to wait until the late Middle Ages and early Renaissance to find the idea that we can *force* the object to appear. That was the role of the scientific experiment.

But the idea of the scientific experiment led to a reconceptualization of the objects of investigation. That is, one was led to reflect on what was meant by a "fact" and how a fact was evident or constituted evidence of something more general.

We can distinguish at least two main trends. One in which, following the Greeks, facts are subjected to principles or universal propositions governing the theory. In an important sense, a fact illustrates a general principle. In *Posterior Analytics*, Aristotle claims that "sense perception must be concerned with particulars, whereas knowledge depends upon the recognition of the universal" (Aristotle, *Posterior Analytics*). Hence, for Aristotle and the Ancient thinkers, a fact embodies something that transcends it. By contrast, since the early 17$^{th}$ century, under the influence of Francis Bacon, facts were understood by some natural philosophers as theory-free particulars. As Poovey (1998) notes, some scientists argued that "one could gather data that were completely free of any theoretical component" (1998, p. xviii). With Francis Bacon, particulars gained an epistemological prestige.

The previous comments underline the idea that a theory includes assumptions about the "nature" of facts and how the facts of a theory relate to the theory's principles. In Aristotle's approach the fact refers to general principles; the fact is a particularisation of the general. In the Baconian approach, the fact generates the principle through an inductive process. In both cases, an understanding of the reality under investigation is achieved.

Of course, this is true of theories in mathematics education too. For instance, Niss (1999) contends that a theory in math education has two goals.

First, it entails a descriptive purpose aimed at increasing understanding of the phenomena studied. Second, it has a normative purpose aimed at developing instructional design. I shall come back to the second goal and focus now on the first goal—understanding.

The understanding of the phenomena under investigation can only be achieved against the background of general principles—it can be abstract principles in the Aristotelian sense or inductive principles in the Baconian sense, but it can also be something else. The understanding of the phenomena needs to be achieved against the background of general principles, for understanding, as Hegel noticed, is a form of theoretical consciousness that is beyond the fact as such. If you remain with the fact and the fact alone, without subsuming or relating it to something else, you have not yet understood.

So, a theory necessarily comprises a set of principles. Actually, it is not just a set in the sense of a bunch of items. The principles of a theory are *conceptually organized*. It is perhaps better to see them as a kind of graph, to emphasize the idea that principles are related.

Here is an example.

One principle of constructivism is the following:

*Knowledge is not passively received but built up by the cognizing subject*.

Here is a second principle:

*The cognizing subject not only constructs her own knowledge but she does so in an autonomous way.*

The second principle adds a requirement about how the building of knowledge stated in the first principle is supposed to be achieved.

But we have more than principles in a theory. A theory is a *heuristic* device used to make sense of the world (Eagleton, 1990). As such, it asks and tries to answer questions. For instance, to follow with the constructivist example, we can ask: How do children construct the concept of number?

So, in addition to principles, we have research questions. To answer them we have to produce facts that support the answers to the questions. In order to do that we still have to find the facts that will be bearers of evidence. And the meticulous way of doing that is what the *methodology* of a theory consists of. The methodology is what is going to force the realm of reality we are interested in to show up. To use Heidegger's (1977) description, the methodology is that which makes the realm of reality "reveal itself through the spectacle of its appearance." Once seen, the appearance or phenomenon is amenable to interpretation, which may result in the understanding Niss (1999) is talking about.

Drawing on what has been said, I have suggested (2008a) that a theory in math education can be considered as a triplet (P, M, Q), where P stands for the theoretical principles, M for the methodology of the theory, and Q for the research questions that a theory investigates. Q gives us an idea of the "sensitivity" of the theory.

## 3. The growth of theories

Naturally, a theory grows. Theories are not fixed entities; they evolve in time. There is indeed a dialectical relationship among the various components of a theory. The dialectical relationship is mediated by the *results* that a theory produces. What this means is that the three components of a theory—P, M, and Q—change as the theory produces results. In other words, the results of a theory influence its components. For instance, with the development of more and more sophisticated digital technologies, researchers are capable of producing more sophisticated facts and analyzing them in more complex manners. Digital technologies allow researchers to improve the methodology of their theories and produce new facts. These facts are then formulated, with the aid of the theories' principles, in theoretical terms, leading to new understandings of the phenomena under consideration. In turn, the fabrication or production of facts and their theoretical formulation in the manner of results allow researchers to refine more and more the theoretical principles and research questions of their theories.

Here is an example. Around 2004, in my research laboratory, we were analyzing the role of embodiment in adolescents in some generalizing tasks. We were conducting fine-grained video analyses to understand the role of gestures, mathematical signs, and language. After watching a short passage, we started noticing the role of rhythm (Radford, Bardini, & Sabena, 2007; see also Radford & Sabena, 2015). We did not anticipate rhythm as playing a subtle and profound semiotic role in mathematics cognition. Watching the video clip over and over within the possibilities of frame-to-frame analysis, we evidenced a "fact" that was theorized through the principles of the theory: We realized that rhythm was a fundamental semiotic means of knowledge objectification. *Praat* software (Boersma & Weenink, 2017) allowed us to carry out a pitch and prosodic analysis to confirm the role of rhythm. The new results required a refinement of the theoretical principles.

A more recent example has to do with the role of emotions in teaching and learning (Radford, 2015). This example is harder to pinpoint temporally, as it was part of a long process in the course of which we were continuously seeing teachers and students engage emotionally in teaching and learning. However, for emotions to emerge as a theoretical construct took a long time.

But theories also evolve by interacting with other theories. And it is here that the question of connecting theories in mathematics education comes in.

What I have said about theories is not an account of their emergence. Such an account, which is problematic on its own, should require a different approach. In the field of connecting theories what we have is two or more theories coming into contact. Although they are always changing, the theories are already there.

There are some interesting and very specific problems that arise out of the attempt to put theories in some sort of relationship.

## 4. Connecting theories

To investigate what happens when theories come into an explicit relationship—for instance, when a same piece of phenomenon (a video clip for example) is analyzed by two or more theories—I suggested that it might be worthy to consider theories as positioned in something that the semiotician Lotman (1990) calls a *semiosphere*.

Let me give you a spatial metaphor for Lotman's concept.

Theories inhabit the semiosphere—a multicultural, heterogeneous, and dynamically changing space of conflicting views and meaning-making processes generated by theories and their different research cultures.

It is in the semiosphere that theories live, move, and evolve. It is in the semiosphere that theories come into a relationship.

The relationship may have different goals. Prediger, Bikner-Ahsbahs, and Arzarello (2008) identified some of them in their ZDM paper. They include contrasting theories, combining them, and even ignoring other theories!

The goal of the relationship makes the theories come close to each other. How close they come depends on the goal of their dialogue. Understanding each other may not require the same proximity as when one wants to combine or synthesize them. But the kind of relationship that can exist between theories depends also on how *compatible* theories are.

Now, how can we have a sense of how far or close or compatible theories are?

A theory can be stretched so as to come close to another one. But there are limits. One interesting historical example of a relationship between theories resulted from the dialogue that North American constructivism and German interactionism carried out in the 1990s. Those theories are certainly different in many important respects, in particular in their theoretical principles as shown for instance by their different concepts of *meaning*. In constructivism, meaning is a psychological construct. In interactionism, meaning is a socio-relational or interactional notion—it is not something that is in the head but in the interaction. The different theoretical principles of those theories define the contours of what is theoretically achievable in terms of combining them. Constructivists realized that they could incorporate something that was missing in their theory: the social dimension. But this incorporation of the social, they knew very well, had to be done in a way that is *consistent* with their general theoretical principles. As we all know, in the end, the social dimension of knowing was integrated in a way that kept intact the epistemic exigencies of their postulates, such as the autonomy of the learner in the act of learning. This is why within the North American constructivism, as Simon (2012) reminds us, it is not possible to run a social and individual analysis *at the same time*. You cannot focus on, and study, the individual and the social at once, concurrently. For the North American constructivism, the social and the individual are like those quantum entities that you cannot see simultaneously.

This interesting problem is not specific to constructivism. It appears in the theory of didactic situations (Brousseau, 1997) as well. The constructs of devolution, a didactic situation, and milieu are indeed attempts at addressing the question of the social and the individual. I don't have time here to comment on the tensions that are produced in this theory by the integration of the social in the account of learning. The point that I want to make is rather that theoretical principles offer possibilities but also set limits to what can be incorporated without becoming inconsistent.

Let me come back to the general idea of linking theories. I think that most theories—perhaps all of them—are different. There is always a gap that you will find between theories if you dig deep enough. If such a gap did not exist, theories would be reducible to a single Grand Theory and mathematics education would be a tautological discourse.

Now, the fact that two theories can *be* different, that there is always a gap, is not a reason to imagine that a dialogue between them cannot be fruitful. A dialogue between theories, however, is not easy to achieve. Here are two reasons why.

The first one has to do with the polysemy or coexistence of many possible meanings for a word or phrase. *Epistemic action* or *social interaction* may have one meaning in one theory and a different meaning in another theory.

The second reason is that theories in mathematics education reflect and refract implicit and specific national-cultural "world views." They are unavoidably immersed in those symbolic systems of cultural significations that Cornelius Castoriadis (1987), Ernst Cassirer (1955), Hegel, (2001) and others have pinpointed in their investigation of the symbolic structures of society—structures from where (implicitly or explicitly) our theories draw their views of what constitutes a good student, a good teacher, a good math lesson, and so on.

## 5. Boundaries

As I have just suggested, theories can be put into some sort of relationship. We can always try to connect them in some way. Now, there is a limit to what can be connected.

This limit is determined by the goal of the connection, but also by the specificities of the components (P, M, Q) of the theories that are being connected. This limit has to do with the boundary of each theory under consideration.

For Lotman (1990), a boundary is one of the primary mechanisms of semiotic individuation, something that marks the limits of a first-person form ("I," "us") in opposition to non-first-person forms ("you," "them").

Drawing on this idea, I suggest calling the boundary of a theory the "edge" that a theory cannot cross without a substantial loss of its own identity. The boundary sets the “limit” of what a theory can legitimately predicate about its objects of discourse; beyond such an edge, the theory conflicts with its own principles.

Thus, the manner in which constructivism theorizes learning can be stretched to a certain point, but we cannot make it coincide with the manner in which Vygotskian approaches theorize learning. Constructivism cannot give up its idea of the learner as an autonomous, adaptive, and self-regulating agent. If it does, then it is no longer constructivism. Constructivism would have transmuted into something else.

## 6. Affinities

In Section 2, I noted that the principles of a theory are *conceptually organized*. They provide a theory with an interconnected conceptual kernel from where other concepts come to be related. It often happens that a theory A seems to “resonate” with another theory B. This resonance is part of a general phenomenon that I would like to term “affinity.” Affinity can occur at the level of the methodology, the theoretical principles, and/or the research questions. However, generally speaking, the meaning of an affine object O in the theory A is different from the meaning this object O may have in the theory B. The “place” of O in A and B is usually not the same—the manner in which O is understood in A and B may not coincide. In particular, it is not possible to directly import an affine object that is part of a theory into the other theory. The reason is that a theory is a *system*. The research questions are formulated in such a way that they make sense within the concepts and vocabulary of the theoretical principles; similarly, the methodology is deeply related to the theoretical principles, which do not constitute an agglomeration of theoretical claims. The systemic nature of a theory excludes a broad ranging homomorphism that would preserve meaning in general.

Here is an example. Inferentialism includes in its conceptual kernel the idea that what distinguishes us as humans is our capacity for making our thoughts explicit through language and discursive practices. Noorloos, Taylor, Bakker, and Derry explain inferentialism as follows:

> Inferentialism is a semantic theory that explains concept formation in terms of the inferences individuals make in the context of an intersubjective practice of acknowledging, attributing, and challenging one another’s commitments. For inferentialism, inferences cannot be understood apart from the norms that exist in this intersubjective practice, the game of giving and asking for reasons, with the consequence that individual reasoning cannot be understood apart from this social, norm-laden game. Inferentialism provides an alternative characterization to constructivism’s conception of social-individual interaction that replaces the latter’s emphasis on construction with a focus on the role of reasoning in learning. (Noorloos et al., 2017, para. 2)

Inferentialism comes from a contemporary branch of semantics. It focuses on how we respond to things around us, more specifically how we respond in a reasonable manner to what we say. Although in principle there are many ways in which we may reason about what we do and say, inferentialism focuses on inferences; that is, how we deduce things from other things. Language comes to play here an important role, as it is through language that, according to inferentialism, we make our claims explicit.

Inferentialism seems to have affinities with the problems of emotions as articulated within the Vygotskian tradition (see, e.g., Radford, 2015), and maybe with embodied cognition (Edwards, Radford, & Arzarello, 2009; Radford, Arzarello, Edwards, & Sabena, in press). Naturally, emotions and embodied actions can be *reasons* for something. Yet, the themes of emotion and embodied cognition first need to be coherently subsumed under the theoretical principles of inferentialism. It may be the case that the result of subsuming emotions and embodiment under the theoretical principles of inferentialism ends up in something different from the manner in which emotions and embodiment appear in some Vygotskian contemporary theories (e.g., Radford, 2008b). The resulting systemic theoretic relationship between language, emotions, and embodiment may be different and may lead to different accounts of learning and concept formation.

## 7. Growth and transformation

Let me return to the question of the evolution of theories that I discussed in Section 3. The existence of a hard kernel in a theory does not prevent the theory from growing. Boundaries are continuously growing and changing. And actually, one of the most interesting effects of connecting theories is that it makes theories grow.

For instance, in a previous experiment in connecting theories, reported in the 2010 PME (see Bikner-Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue, & Sabena, 2010), Abstraction in Context and Interest-Dense Situation theories entered into a semiospheric relationship. As a result, some peripheral conceptual entities, that is, entities that were not organic parts of each one of these theories, ended up gaining a more central role. This was the case of the *general epistemic need* concept. This marginal entity made its entrance through the theories' interaction.

Another example: the connection of the Semiotic Bundle and Interest-Dense Situation approaches brought forward a peripheral construct, the *epistemological gap* construct.

It seems then that when two (or more) theories position themselves towards each other to enter into a semiospheric dialogue, a halo of new conceptual possibilities is formed. Potential entities appear. But they remain in the periphery of the cluster that the theories constitute. They remain "revolving around," as the etymological sense of *periphery* intimates. An effort of objectification is required to bring the peripheral entities into attention. And, in this objectifying movement, in order to accomplish the crossing of the peripheral threshold, we need something or someone else. For in the end, it turns out, as Bakhtin was suggesting, that as "every internal experience occurs on the border, it comes across another, and in this tension-filled encounter lies its entire essence." (Bakhtin, 1984, p. 287, adapted from Todorov, 1984, p. 96).

## Acknowledgments

This article is a result of a research program funded by the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (SSHRC/CRSH). A previous version of this article was presented at the *International Colloquium: The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Homage to Michèle Artigue*. Université de Paris VII. May 31 to June 1, 2012.

## References

Bakhtin, M. (1984). Esthétique de la création verbale [The aesthetics of verbal creation]. Paris: Gallimard.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Mathematics in different settings (Vol. 1, pp. 145–175). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). Networking of theories as a research practice in mathematics education. Cham, Switzerland: Springer.

Boersma, P., & Weenink, D. (2017). Praat: Doing phonetics by computer. Amsterdam, The Netherlands: University of Amsterdam (http://www.fon.hum.uva.nl/praat/).

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona: Editorial Gedisa.

Cassirer, E. (1955). The philosophy of symbolic forms: Language. New Haven, CT: Yale University Press.

Castoriadis, C. (1987). The imaginary institution of society. Cambridge, Massachusetts: M.I.T. Press.

Eagleton, T. (1990). The significance of theory. Oxford: Blackwell.

Edwards, L., Radford, L., & Arzarello, F. (Eds.). (2009). Gesture and multimodality in the construction of mathematical meaning. Educational Studies in Mathematics [Special issue], 70(2).

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 39(1–2), 127–135.

Hegel, G. (2001). The philosophy of history. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837).

Heidegger, M. (1977). The question concerning technology and other essays. New York: Harper Torchbooks.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. ZDM Mathematics Education, 48(6), 721–737.

Lotman, Y. (1990). Universe of the mind: A semiotic theory of culture. London: I.B. Tauris Publishers.

Martin, S. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. PNA, 6(2), 43–49.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 40, 1–24.

Noorloos, R., Taylor, A., Bakker, S., & Derry, J. (2017). Inferentialism as an alternative to socioconstructivism in mathematics education. Mathematics Education Research Journal. Retrieved from https://doi.org/10.1007/s13394-017-0189-3

Poovey, M. (1998). A history of the modern fact: Problems of knowledge in the sciences of wealth and society. Chicago and London: University of Chicago Press.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. ZDM Mathematics Education, 40(2), 165–178.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. ZDM Mathematics Education, 40(2), 317–327.

Radford, L. (2008b). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2015). Of love, frustration, and mathematics: A cultural-historical approach to emotions in mathematics teaching and learning. In B. Pepin, & B. Roesken-Winter (Eds.), From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education (pp. 25–49). Cham, Switzerland: Springer.

Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L., & Sabena, C. (in press). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In J. Cai (Ed.), First compendium for research in mathematics education. Reston, VA: NCTM.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. Journal for Research in Mathematics Education, 38(5), 507–530.

Radford, L., & Sabena, C. (2015). The question of method in a Vygotskian semiotic approach. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), Approaches to qualitative research in mathematics education (pp. 157–182). New York: Springer.

Reid, D., & Mgombelo, J. (2015). Survey of key concepts in enactivist theory and methodology. ZDM Mathematics Education, 47(2), 171–183.

Sensevy, G. (2011). Le sens du savoir: Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique [The sense of knowledge: Elements for a theory of joint action in didactics]. Bruxelles: De Boeck.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds). (1998). Mathematics education as a research domain: A search for identity: An ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), International handbook of mathematics education (pp. 827–876). Dordrecht: Springer.

Simon, M. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. PNA, 6(2), 43–49.

Todorov, T. (1984). Mikhail Bakhtin: The dialogical principle. Minneapolis: University of Minnesota Press.

# CONVEGNI E CONGRESSI

### *Incontri con la Matematica* n. 31

# *Matematica, Didattica e Scuola: fra ricerca e prassi quotidiana*

**Castel San Pietro Terme (Bologna)**
**10-11-12 novembre 2017**

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

ISTITUTO COMPRENSIVO STATALE MONTECARLO
SCUOLA DELL'INFANZIA, SCUOLA PRIMARIA, SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO
MONTECARLO E VILLA BASILICA - LUCCA

Artebambini

Direzione:
Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli.

Organizzazione scientifica e didattica dell'evento:
NRD di Bologna e Associazione Incontri con la Matematica
con la collaborazione di Formath

Organizzazione economica e finanziaria:
Istituto Comprensivo di Montecarlo (Lucca), Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione degli insegnanti
e Artebambini.

Il programma completo dell'evento è pubblicato nei seguenti siti:
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.artebambini.it

Si riporta di seguito un breve stralcio del programma.

## CONFERENZE

**Venerdì 10 novembre, Centro Congressi Artemide. Tutti gli ordini scolastici**

14:00-14:30 Inaugurazione del convegno, saluti delle autorità politiche e accademiche. **Fausto Tinti** (Sindaco di Castel San Pietro Terme), **Fabrizio Dondi** (Assessore di Castel San Pietro Terme), **Mirko Degli Esposti** (Prorettore vicario dell'Università di Bologna), **Giovanni Dore** (Direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna), **Gino Carignani** (Dirigente IC Montecarlo, Lucca), **Mauro Speraggi** (pedagogista Artebambini), **Paolo Negrini** (co-responsabile scientifico del NRD di Bologna), **Barbara Cunsolo** (Direttrice Redazione Giunti Scuola).

14:30-15:15 **Maria Alessandra Mariotti** (Università di Siena, Presidente AIRDM): Tra il fare il dire ... Apprendere con l'uso di strumenti: il ruolo di mediazione dell'insegnante.

15:15-16:00 **Angelo Guerraggio** (Centro Pristem, Università Bocconi di Milano): Matematica, scienza, democrazia.

16:00-16:30 Pausa

16:30-17:15 **Benedetto Di Paola** (Università di Palermo), **Nicla Palladino** e **Nicolina Pastena** (Università di Salerno): La storia della Matematica come chiave per l'inclusione interculturale nella pratica d'aula attuale.

17:15-18:00 **Beniamino Danese** (Reinventore srl, Verona): Sole e Luna, insegnanti di Matematica.

18:00-18:45 **Giorgio Bolondi** (Università di Bolzano): Il gioco matematico, strumento per lo sviluppo della competenza argomentativa.

18:45-19:30 **Roberto Trinchero** (Università di Torino – autore e formatore Rizzoli Education): Formare per competenze in Matematica.

**Sabato 11 novembre, Centro Congressi Artemide. Scuola Primaria e Secondaria**

14:45-15:30 **Samuele Antonini** (Università di Pavia): Argomentare, comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri: attività didattiche con la teoria dei giochi cooperativi.

15:30-16:15 **Bruno D'Amore** (NRD Università di Bologna) e **Silvia Sbaragli** (Dipartimento Formazione e Apprendimento, Locarno, Svizzera): Esempi significativi di storia della matematica per l'attività in aula.

16:15-17:00 **Maria Mellone** (Università di Napoli): Early Algebraization: appunti di viaggio.

17:00-17:30 Pausa

17:30-18:15 **Nicolina Malara e Giancarlo Navarra** (Università di Modena e Reggio Emilia): Termini e paradigmi dell'early algebra.

18:15-19:00 **Tiziano Pera** (GRDS Università di Torino) e **Sergio Vastarella**

(NRD Università di Bologna): Valutazione dialogante delle competenze e compiti di realtà: uno sguardo sulla matematica.

**Sabato 11 novembre, Salone delle Terme, Albergo Terme. Scuola dell'Infanzia**

14:45-15:30: **Giancarlo Navarra** (Università di Modena e Reggio Emilia): Mi spieghi quante perle ha ora la principessa? Il gioco della Matematochetta: un avvio alle prime operazioni aritmetiche.

15:30-16:15: **Elisa Passerini** e **Gian Marco Malagoli** (Sapyent): Magico abaco, dal tocco al pensiero. Percorso di avviamento all'uso del Soroban.

16:15-16:45: Pausa

16:45-17:30: **Paola Mattioli** (Istituto Marymount, Roma): Avvicinare i bambini al concetto di quantità *giocando* con Cubetto.

17:30-18:15: **Lietta Santinelli** (Centro Ergoterapia Pediatrica CEP, Bellinzona, Svizzera) e **Silvia Sbaragli** (Dipartimento Formazione e Apprendimento, Locarno, Svizzera): Dall'approccio spontaneo alle indicazioni necessarie: come accompagnare il bambino alla rappresentazione dei numeri.

18:15-19:00 **Giovanni G. Nicosia** (RSDDM Università di Bologna): Modelli ed attività matematiche nella scuola dell'infanzia di diversi paesi.

**Venerdì 10 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme**
**SERATA CULTURALE: Arte e Matematica. Per tutti i livelli scolastici.**

20:45 – 21:45 **Lorenzo Bocca** (IC G. Falcone e P. Borsellino, Offanengo, Cr) e **Pino Trogu** (San Francisco State University): Gli oggetti trasformabili di **Giorgio Scarpa**. Geometria come Arte Scienza Gioco.

**Sabato 11 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme**
**SERATA CULTURALE. Per tutti i livelli scolastici.**

20:30 – 21:15 **Anna Cerasoli** (Scrittrice): Calcolo Combinatorio: un po' per gioco, un po' per conoscenza. Lettura e commento di racconti matematici per tutte le età.

21:15 – 22:00 **Ennio Peres** (Giocologo e matemagico): Numeri spettacolari.

**Sabato 11 novembre, Centro Congressi Artemide**
**TEATRO. Per tutti i livelli scolastici.**

13:15-14:00 **Mateatro** (Liceo Bocchi-Galilei, Adria, Ro; RSDDM Università di Bologna) a cura di **Gianni Callegarin**: I 3 matematici (Fibonacci, Talete, Pitagora).

# RECENSIONI
# E SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

**Ennio Peres, *Matematica per comuni mortali*. Milano: Salani, 2017. 160 pp.**

Ho letto tanti libri di Ennio e ne ho recensiti otto su varie riviste; e lui ha scritto una prefazione a un mio libro di giochi. Tante volte l'ho invitato a tenere conferenze e seminari nei convegni da me organizzati, la prima volta 32 anni fa. Che dire? Il lettore capirà meglio se scrivo la seguente frase: il più grande giocologo d'Italia non smette mai, ancora oggi, di stupirmi.

Intanto quel divertente titolo: "per comuni mortali" … Chi sarebbero i comuni mortali? Sono coloro che hanno intuito il mondo affascinante che c'è dietro la matematica, la definizione è data nel risguardo della pagina 1 della copertina.

E poi, che cosa contiene questo libro? Le "solite" cose …

Una lunga, piacevole, brillante introduzione sulla matematica vista con gli occhi seri della storia, severi del professore (ex, in questo caso), divertiti del giocologo. E poi sette capitoli, i cui titoli dicono tutto:

1. *Numeri curiosi*, una raccolta di curiosità che non possono che sbalordire gli amanti dei misteri delle cifre, e incuriosire coloro che credono di odiare la matematica.
2. *Pura logica*, una bella raccolta di giochi alla Gardner, con soluzioni a volte inattese; per sicurezza Ennio dà sempre la soluzione, alla fine di ogni capitolo.
3. *Pensiero laterale*, una divertente e profonda raccolta di proposte di indovinelli alla De Bono, per risolvere i quali occorre una bella dose inventiva; molti di questi hanno più soluzioni; per esempio, caro Ennio, quella che dai a pag. 67 per l'esercizio 3.1. proposto a pagina 56, ha un'alternativa fantastica e coerente …
4. *Lampo di genio*, proposte nelle quali serve assai poca matematica (e, quella che serve, estremamente elementare), ma molto acume.
5. *Magia matematica*, trucchi alla portata di tutti, con i quali si possono stupire gli amici durante un'altrimenti noiosa riunione, vera e propria magia (in questo genere di attività, Ennio è sempre stato un maestro di livello mondiale); alcuni di queste magie hanno 700 anni e più, pensa un po' …
6. *Paradossi matematici*, nei quali si mescola l'intuizione, che viene severamente sfidata, la capacità di vedere, alcune nozioni di aritmetica e di geometria che, talvolta, giocano al contrario.
7. *Strategie ottimali*, basato sui principi più elementari della teoria dei giochi, forse il più matematico di tutti, ma anche il più formativo.

Segue una breve bibliografia.

Sei un insegnante di matematica, di non importa qual livello scolastico, dalla scuola primaria all'università?

I tuoi allievi a volte manifestano noia o rifiuto della matematica? Dedica 20 minuti a settimana ai giochi matematici, sorprendi i tuoi studenti, divertili, appassionali; a parte che impareranno più matematica in quei 20 minuti che nel restante tempo, di certo vedranno la matematica con occhi nuovi. Ti chiederanno: "Ma prof, interroga su queste cose? Rientrano nella valutazione?" E tu dirai: "Certo, perché è matematica per davvero, ma la valutazione non sarà fatta sulla base di interrogazioni, creerete voi giochi analoghi e li proporrete a casa e ai compagni e agli amici".

I tuoi allievi sono ghiotti divoratori di matematica, pendono dalle tue labbra quando fai lezione, adorano eseguire esercizi in quantità e si divertono tanto a farli? Premiali, mostra loro questi giochi, queste curiosità, queste ghiottonerie, e lascia che si entusiasmino ancora di più, scoprendo un lato troppo spesso nascosto della nostra meravigliosa disciplina.

In entrambi i casi, ringrazierai poi Ennio, il matemagico.

Bruno D'Amore

**Bruno D'Amore y Luis Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017. 192 pp. http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf**

Questo libro, disponibile e gratuito sia in versione cartacea sia in versione pdf, si apre con due prefazioni, dotte e profonde, firmate da due illustri personaggi, studiosi e ricercatori di fama internazionale, entrambi presidenti dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), rispettivamente, dal 2007 al 2009, e dal 2013 al 2016: Michèle Artigue (medaglia Félix Klein 2013) e Ferdinando Arzarello (presidente della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dal 1998 al 2006). Entrambi i prefatori evidenziano le divergenze e le convergenze dei punti di vista dei due autori in didattica della matematica; da una parte, l'importanza che entrambi attribuiscono alla dimensione epistemologica, semiotica e sociologica, alla pratica storica e culturale, alla necessità di rivedere alcuni concetti fondamentali, quali il sapere, la conoscenza e l'apprendimento; dall'altra, le loro diverse esperienze, culture didattiche, convinzioni epistemologiche e semiotiche, che alimentano l'impalcatura logica delle loro riflessioni, discussioni, argomentazioni, analisi didattiche, orientando il loro sguardo sul mondo, sulla cultura, sulle situazioni d'aula, sull'insegnamento e sull'apprendimento.

È il secondo di una serie di volumi destinati ai ricercatori, agli studenti di dottorato, agli studenti universitari, ai docenti universitari, ai docenti di scuola di qualunque livello, che desiderano approfondire alcuni temi di ricerca di grande attualità e rilevanza a livello internazionale in didattica della matematica. Nel primo volume gli autori, Raymond Duval e Adalira Saenz Ludlow, con grande profondità di argomentazioni, avevano affrontato e analizzato i problemi di comprensione nell'apprendimento della matematica da un punto di vista cognitivo e, allo stesso tempo, semiotico. In questo secondo volume, i problemi semiotici, epistemologici e pratici relativi all'insegnamento e all'apprendimento della matematica vengono spiegati, interpretati e affrontati dagli autori, Bruno D'Amore e Luis Radford, anche in chiave sociologica e storico-culturale. Si tratta di questioni e problemi fondamentali per la didattica della matematica che ogni docente si pone e deve in qualche modo affrontare per capire le situazioni d'aula e intervenire efficacemente. Certo, il modo di affrontare certe questioni è sempre relativo al contesto sociale e culturale in cui ci si trova a operare e strettamente legato a ipotesi, assunzioni, obiettivi, conoscenze e convinzioni personali o collettive sui processi di insegnamento e apprendimento della matematica, come affermano gli stessi autori e come si evince dalle loro analisi, condotte con impareggiabile maestria ed estrema perizia, da punti di vista differenti ma complementari e convergenti su obiettivi comuni. Anche dalla premessa:

> È apparsa una necessità di discutere di nuovo di concetti che sono rimasti impliciti nel discorso didattico o che hanno acquisito una certa stabilità concettuale nel corso degli ultimi decenni nel processo di insegnamento e di apprendimento della matematica, come il concetto di sapere, di conoscenza, di rappresentazione e anche il concetto stesso di apprendimento. (p. 25)

Le questioni affrontate sono in effetti tante. Eccone alcune:

Come concepire il sapere? E la conoscenza? Che cos'è un concetto? Come avviene la concettualizzazione in matematica? Come concepire un oggetto matematico? E l'apprendimento? Come avviene l'apprendimento in matematica? Che cosa si intende per interiorizzazione? E per oggettivazione? Come concepire la soggettività? E l'alienazione?

Che struttura ha l'attività matematica? Che cosa si intende per "pratica"? E per "meta-pratica"? Quali tipi di pratiche intervengono nelle attività matematiche? Come affrontare le difficoltà che gli studenti incontrano in tali attività? Con quali strumenti? Come concepire gli ostacoli che si presentano nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica? Come interpretare l'errore? Dove si annida il fallimento?

In relazione a tutto questo: Come concepire la formazione universitaria dei docenti di scuola primaria? E quella dei docenti di scuola secondaria? Che cosa dicono le ricerche sulla formazione professionale dei docenti di matematica? E sui corsi di didattica della matematica offerti dalle università e dalle istituzioni scolastiche? A quale tipo di Sapere si fa riferimento nella formazione dei docenti di matematica? Di che tipo è il sapere insegnato? Che cosa si può dire del sapere appreso e del suo uso professionale?

Le risposte a queste ultime domande, che riguardano in modo specifico la didattica della didattica della matematica, si trovano tutte nel secondo capitolo, scritto da Bruno D'Amore e da Martha Isabel Fandiño Pinilla. Tale capitolo fornisce anche alcuni strumenti di base per l'analisi delle situazioni d'aula e per affrontare e sviluppare nei capitoli successivi, anche da altri punti di vista, le questioni sollevate dalle altre domande. Dunque, al lettore che non dispone già di tali strumenti, o che desidera convincersi pienamente, fin da subito, della rilevanza teorica e pratica che ha la didattica della matematica come disciplina scientifica nella formazione professionale dei docenti, consiglio di partire dal secondo capitolo.

Ma torniamo alle prime domande: Come concepire il sapere, la conoscenza, l'apprendimento?

Sulla base di una epistemologia di tipo pragmatista, e degli studi di Yves Chevallard, Juan D. Godino e Carmen Batanero, Bruno D'Amore afferma che il sapere e la conoscenza riflettono, al medesimo tempo, una dimensione sociale, istituzionale, e una dimensione personale, individuale: "Alla 'costruzione' di un 'concetto' partecipano tanto la parte istituzionale, il sapere, quanto la parte personale di chiunque abbia accesso a tale sapere, pertanto non solo lo scienziato" (p. 69). Ma in che modo partecipano?

Anzitutto vi è il *Sapere* (con la *esse* maiuscola), ovvero il risultato di studi, ricerche o di processi storici in un dato contesto culturale (la matematica o la didattica della matematica, nel nostro caso), rappresentato da uno dei vertici del classico triangolo della didattica. Da una opportuna trasposizione didattica del Sapere deriva il *sapere istituzionale* o *da insegnare*, ovvero il sapere riconosciuto e accettato come tale entro una data istituzione (università, scuola, dipartimento ecc.). Sulla base di un'opportuna ingegneria didattica, dal sapere istituzionale o da insegnare si passa al sapere *insegnato*, ovvero a una manifestazione o realizzazione concreta del sapere istituzionale o da insegnare all'interno di un percorso didattico; una *attualizzazione* o *materializzazione* del sapere, nelle parole di Luis Radford. Al sapere insegnato *dovrebbe* poi essere strettamente legato il sapere *acquisito* ovvero: "il prodotto della elaborazione dell'esperienza con la quale entra in contatto il soggetto che apprende; e questa elaborazione consiste nella interazione tra l'individuo e il suo ambiente e nel modo in cui l'individuo interiorizza il mondo esterno" (p. 78). Si tratta di una costruzione nella quale intervengono fattori e variabili non solo personali ma anche sociali e culturali.

Sulla base di un'interpretazione in chiave sociologica delle attività d'aula, l'apprendimento viene anche assunto come "adesione a una pratica sociale condivisa" (p. 179), di varia natura: concettuale, algoritmica o esecutiva, strategica o risolutiva, semiotica, comunicativa, oppure ad esse trasversale, come quando si fa riferimento alla gestione complessiva degli aspetti semiotici specifici del discorso matematico (si veda tutto il primo capitolo).

D'altra parte, in matematica, come afferma Raymond Duval, l'apprendimento concettuale è inseparabile da quello semiotico: "non esiste noetica senza semiotica" (p. 81). Ed è qui che entra in gioco la prospettiva semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica, introdotta da Raymond Duval alla fine degli anni '80. Fortemente condivisa da Bruno D'Amore, essa chiarisce, in modo efficace, la natura dei processi cognitivi sottostanti i fenomeni di comprensione nelle attività matematiche, il ruolo dei segni e delle rappresentazioni in tali attività e la natura stessa delle difficoltà che gli studenti incontrano nei processi di apprendimento della matematica. Tale prospettiva viene qui presentata e rielaborata in modo chiaro, incisivo e originale, anche sulla base dei risultati di recenti ricerche.

Nell'approccio storico-culturale di Luis Radford il sapere, la conoscenza e l'apprendimento sono concepiti in modo fondamentalmente diverso. I fondamenti filosofici di tali concetti e, più in generale, della sua *teoria dell'oggettivazione* si possono trovare, come afferma lui stesso, in alcuni lavori del filosofo tedesco Georg Wilhelm Friedrich Hegel, e nei successivi sviluppi dovuti a Karl Marx e a tutta la tradizione dialettica, Evald Ilyenkov, Boris Mikhailov, Lev Semënovič Vygotskij, per esempio.

Anzitutto, il sapere e la conoscenza non riflettono una dimensione personale separata da una dimensione istituzionale in quanto non derivano dalla pura attività soggettiva dell'individuo. Il sapere non è qualcosa che si costruisce o si trasmette, ma solo "*possibilità*, vale a dire, qualcosa di potenziale che emerge dall'attività umana e si intreccia in un processo di movimento – di *divenire*, per essere precisi – per *materializzarsi* o *esprimersi* in conoscenza" (p. 100). Il sapere è *potenzialità*: "possibilità che hanno gli individui di pensare, riflettere, porre e risolvere problemi in un certo modo" (p. 101), ovvero "un sistema codificato di processi corporei, sensoriali e materiali di azione e di riflessione, costituiti storicamente e culturalmente" (p. 101), che si presentano a noi come pure possibilità.

La conoscenza, anch'essa intesa in senso dinamico come processo (*knowing*), è "l'attualizzazione o la materializzazione del sapere" (p. 107) che si realizza attraverso l'attività "per mezzo di artefatti, forme d'uso di artefatti, ma anche per mezzo di forme e modi dell'interazione umana, che sono storici e culturali" (p. 109). Tuttavia, in quanto pura possibilità, "il sapere non può identificarsi con alcuna delle sue materializzazioni o attualizzazioni" (p. 108), dunque con la conoscenza, essendo questa soltanto "un modo di sapere: una delle sue forme *singolari* sviluppate" (p. 109). Di conseguenza, il sapere si presenta come "una sequenza di azioni codificate storicamente e culturalmente che si materializzano continuamente nella pratica sociale" (p. 117).

In questa prospettiva, come afferma Luis Radford, "l'apprendimento è l'incontro con il sapere e la sua trasformazione soggettiva in qualcosa che appare alla coscienza. Questa trasformazione è ciò che io chiamo *oggettivazione*" (p. 120). L'apprendimento è dunque concepito in termini di *processi di oggettivazione*, ovvero di "processi sociali attraverso i quali si diventa progressivamente e criticamente consapevoli di una forma codificata di pensiero e di azione – qualcosa che notiamo gradualmente e che al medesimo tempo acquista significato" (p. 121). In tali processi, si nota o si percepisce che qualcosa, il sapere culturale, "in sé", si converte in qualcosa, in sapere, "per sé", trasformando anche la coscienza.

La teoria dell'oggettivazione si colloca all'interno di un progetto educativo nel quale, come afferma Luis Radford, "non si considera l'apprendimento come apprendimento di un determinato contenuto concettuale" (p. 160) e neppure "come qualcosa che deve derivare dallo studente" (p. 140). E questo perché: "Per la teoria dell'oggettivazione, l'apprendimento non si riferisce solo al conoscere, ma anche al divenire" (p. 121). Dunque, l'apprendimento è concepito non solo in termini di processi di oggettivazione, ovvero di processi che riguardano la conoscenza, ma anche in termini di *processi di soggettivazione*, ovvero di "processi di creazione di un sé particolare (e unico)" (p. 122). Inoltre:

> Nella teoria dell'oggettivazione la relazione docente-studente è inquadrata dall'idea di attività o *lavoro comune* ed è di natura etica. (...) La relazione etica che la teoria dell'oggettivazione fornisce, elimina la separazione tra docente e studente che la teoria delle situazioni didattiche si sforza di mantenere" (p. 140).

Agli ostacoli di tipo epistemologico, ma non solo, è dedicato il capitolo in omaggio a Giorgio Bagni (1958 – 2009), l'ultimo. In esso viene riportata una interessante conversazione, che risale al 2006, nella quale Bruno D'Amore e Luis Radford rispondono ad alcune domande poste da Giorgio Bagni su temi molto dibattuti in didattica della matematica. I temi riguardano non solo la questione degli ostacoli epistemologici, ma anche la cultura, la storia, il sapere, la conoscenza, l'apprendimento, il linguaggio, la formazione del docente e tanto altro. Le risposte dei due autori risultano ancora basate su scelte epistemologiche differenti, ma complementari e convergenti su temi di interesse comune.

Per esempio, per quanto riguarda l'idea di ostacolo epistemologico, della presentazione classica di Brousseau, Bruno D'Amore afferma di condividere con convinzione e far proprio "il suo essere espressione di conoscenza e non di mancanza di conoscenza" (p. 172), in quanto: "L'ostacolo epistemologico risulta fortemente legato non solo a fattori concettuali ma anche a fattori sociali, nei quali la storia 'pura' della matematica entra in contatto con le storie delle pratiche umane" (pp. 171–172). Luis Radford, invece, afferma di non condividere neppure il significato di *ostacolo* per la sua presunta natura non-culturale:

> Se con il termine ostacolo epistemologico ci riferiamo a un tipo di conoscenza parziale (per esempio, una conoscenza collocata da qualche parte nel percorso dello sviluppo concettuale che serve per risolvere certi problemi ma che inizia a

> essere causa di errori non appena essa viene applicata al di fuori di essi), la questione fondamentale per me riguarda la spiegazione della *natura* del cammino che si suppone essere percorso da tutti noi durante lo sviluppo concettuale, a prescindere dal nostro contesto temporale e culturale. Proprio in quanto la sua natura viene ritenuta essere al di là della cultura e del tempo, tale percorso sembra essere un percorso *universale* di sviluppo concettuale. Ora, dato che per me la cultura e la conoscenza hanno la stessa sostanza, considero la precedente concezione di ostacolo troppo ambiziosa. (pp. 183–184)

Le risposte dei due autori risultano pertanto diverse ma convergenti.

Nelle pagine di questo prezioso volume sono fornite le risposte a tante altre domande e questioni, sulla base degli studi, delle esperienze dirette e dei lavori di ricerca che hanno reso famosi i due autori a livello internazionale. Risposte così profonde e interessanti che non possono non far riflettere, non coinvolgere, non stimolare il lettore.

Al lettore, al docente, al ricercatore la scelta della prospettiva o teoria che fornisce gli strumenti più adatti, utili ed efficaci per capire, studiare, gestire e valutare ciò che accade nella propria aula, o nel contesto specifico in cui si trova ad operare.

Maura Iori

## Piergiorgio Odifreddi, *Dalla terra alle lune: Un viaggio cosmico in compagnia di Plutarco, Keplero e Huygens*. Milano: Rizzoli, 2017. 336 pp.

Nel 2011 uscì un film di Martin Scorzese, *Hugo Cabret*, un vero capolavoro, che fruttò al regista statunitense il premio come miglior regista al *Golden Globe* 2012 e 5 statuette Oscar su 11 nomination ai *Premi Oscar* 2012. Il protagonista è un dodicenne orfano che vive in una stazione ferroviaria a Parigi, nascosto a tutti, che revisiona gli orologi e ruba quotidianamente quel poco che gli serve per vivere. Hugo ha un profondo legame con un robot rotto che gli ha lasciato il padre e che domina tutta la storia del film, automa che egli deve/vuole riparare ad ogni costo. Realmente il costruttore del robot è l'anziano Georges Méliès, interpretato da un superbo Ben Kingsley, proprietario-gestore di un chiosco di giocattoli nella stessa stazione. Parte del film è appunto dedicata alla rivalutazione di Méliès sia da parte delle autorità, sia della critica cinematografica che, all'inizio della sua carriera, l'aveva stroncato e che ora, finalmente, riconosce la sua genialità.

Come, lettore, non ti ricordi il nome di Georges Méliès? Perbacco, è l'autore del film muto *Viaggio nella Luna* del 1902, il primo (vero) film di fantascienza del mondo, ispirato a *Dalla Terra alla Luna* e *Intorno alla Luna* di Jules Verne, del 1865 e 1870, e al romanzo di Hebert George Wells *I primi uomini sulla Luna* del 1901.

Non ti viene ancora in mente? Lo conosci di sicuro, almeno una scena iniziale del suo film è stata vista da tutti: il razzo lanciato dalla Terra si va a infilare nell'occhio destro del faccione umano che rappresenta la Luna, una scena che è parte integrante della storia del cinema.

Un altro grande omaggio alla produzione cinematografica di Méliès è stata fatta dal regista italiano Maurizio Michetti nel film *Domani si balla* (1983) (con Mariangela Melato e Paolo Stoppa) nel quale esseri extraterrestri che ricordano in tutto e per tutto i personaggi di Méliès svaniscono in una nuvola di fumo, uccisi dal suono delle parole che giungono loro dalla Terra, inviate da una stazione televisiva.

Se sei un appassionato della serie *I Simpson*, ricorderai forse il film numero 21 della ventunesima stagione, nel quale si propone una parodia del film. (C'è più matematica nei Simpson che in un testo di algebra per i licei…). Ma allora ti piace forse anche la serie *Futurama*; nella prima stagione, nel secondo film, il robot alcolista Bender infila una bottiglia nell'occhio sinistro del faccione di un funzionario travestito da Luna, evidente riferimento a Méliès.

Che cosa c'entra tutto ciò con il libro di Odifreddi? È che quando leggo qualcosa che mi entusiasma, non so trattenermi e comincio a tessere ragnatele che uniscono mondi. E, certo, questa è stata per me una delle letture più entusiasmanti degli ultimi anni.

Il gigante Plutarco ha scritto, circa nell'anno 70, dunque giovanissimo, il famoso (ma non abbastanza) testo *Il volto della Luna* dal quale, a parte ingenuità che generosamente Odifreddi definisce "giovanili", possiamo ancora attingere molte informazioni sulla cultura greca. Chi ha letto questo dialogo e, più in generale, l'opera di Plutarco? Di certo Copernico, Kepler, Galileo e Newton, alcuni dei quali si lasciano andare a plagi, come Galileo nel *Sidereus Nuncius* del 1610. E poi Shakespeare che ne usa interi brani e la descrizione di alcuni personaggi; l'Alfieri, ghiotto di notizie sui vari studi dell'antichità; Jean-Jacques Rousseau che esalta Plutarco più volte nei suoi scritti; Michel de Montaigne che usa pedissequamente le notizie elargite dallo stesso Plutarco.

Si tratta del più prolifico scrittore greco, appassionato di mitologia, filosofia e scienza, prima dimenticato e poi celebrato con l'avvento dell'Umanesimo e del Rinascimento; la sua opera più famosa è di certo quel *Vite parallele* che è a dir poco geniale; meno conosciuta, dunque, l'opera citata all'inizio, *Il volto della Luna*, alla quale si devono, come scrive Odifreddi "molte informazioni su ciò che i Greci sapevano di meccanica, di ottica e di astronomia: un sapere che andò perduto nel buio dei secoli cristiani, ma che poté essere in seguito ritrovato e rinnovato alla luce dei secoli illuministi" (p. 27).

Nel 1593 un altro giovanotto interessato alle scienze, Johannes Kepler, decide di scrivere un saggio, *Astronomia lunare*, nel quale cerca di rispondere alla seguente domanda: se fossimo sulla superficie lunare, come si vedrebbe il cosmo? E la Terra in particolare? Ma, preso da altre incombenze, non portò a termine questa impresa. Scrisse e pubblicò le sue opere immortali, ben note. Ma, giunto ad una certa età, come suol dirsi per le personnes agées, riprese in mano quel sogno giovanile che, appunto, intitolò *Sogno* (*Somnium*), che però uscì a stampa postumo (1634), a cura del figlio Ludovico. Come ricorda anche Odifreddi, Jorge Luis Borges lo considera il primo vero romanzo di fantascienza. Ma la stessa cosa hanno sostenuto altri autori, tra i quali il più esperto in questo campo, Isaac Asimov. Il protagonista è un ragazzo islandese che ha una madre strega e che viene informato da un demonio dell'esistenza di un'isola (Levania, la Luna); egli allora immagina, come in un sogno, appunto, come si possa vedere la Terra da quell'isola e, più in generale, l'intero firmamento. Lo scopo è divulgativo, affermare e difendere il sistema eliocentrico copernicano.

Nel 1698, già anziano, Christian Huygens pubblica *L'osservatore cosmico*, opera nella quale, facendo esplicito riferimento all'opera di Kepler, si pone lo stesso problema, ma con aspirazioni ancora più vaste; sempre stando sulla Luna, guardare e descrivere la sfera celeste. E poi fare lo stesso con gli altri pianeti del sistema solare. Egli aveva scoperto nel 1655 (a 26 anni) un satellite di Saturno e dunque la sua visione cosmogonica era assai più vasta e completa.

Torniamo al libro di Odifreddi. Che cosa ha pensato di fare il nostro autore? Lo scrive lui stesso: "Ho dunque messo insieme *Il volto della Luna*, il *Sogno* e *L'Osservatore cosmico* come se fossero tre capitoli di un'unica opera collettiva a sei mani. O, parafrasando *Il sogno di Coleridge* di Borges, un archetipo non ancora rivelato agli uomini, un oggetto eterno che sta entrando gradatamente nel mondo: la sua prima manifestazione fu il dialogo di Plutarco, la seconda il racconto di Keplero, la terza il saggio di Huygens" (p. 9).

Un vero e proprio colpo non a sorpresa, che sarebbe troppo, ma certamente adatto ad ammaliare qualsiasi lettore colto e amante delle cose di scienza. Con un risultato che suscita stupore in chi diligentemente legge, lasciandosi dirigere da chi è in grado di ideare simili viaggi culturali.

Questo libro va letto fino in fondo come fosse un romanzo d'avventura, anche perché le ultime pagine riservano al lettore curioso e attento tante sorprese ghiotte.

E adesso, una raccomandazione. Vista la natura di questa rivista è pressoché certo che il lettore di queste righe sia un insegnante di matematica. Ai nostri allievi è sempre meno concesso leggere, perché tutto il mondo che ruota attorno e a volte le nostre stesse indicazioni non vanno in questa direzione. Questo è un libro per professori, non per studenti, ma cela in sé mille preziose e puntuali questioni che un bravo studente curioso può gustare; sarebbe opportuno non sottrargliele.

Bruno D'Amore

**Raymond Duval, *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations.* Foreword by Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG. XXIV+117 pp. doi:10.1007/978-3-319-56910-9**

È uscito in versione cartacea e in versione web l'ultimo libro di Raymond Duval, senza alcun dubbio il più conosciuto e stimato studioso di semiotica nell'ambito della didattica della matematica. In questo testo, l'autore sviluppa e approfondisce alcune delle sue tematiche più note e caratteristiche, dando un forte impulso alle sue ricerche teoriche e pratiche.

**Foreword (in English)**

Si può leggere al seguente indirizzo: https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2017/08/916-D-A-Prefaz-a-Duval-Springer-in-inglese.pdf

**Prefazione (in italiano)**

Dopo essersi dedicato alle problematiche dell'apprendimento del concetto di infinito in matematica e alla distinzione fra dimostrazione e argomentazione, Raymond Duval sorprese tutti i ricercatori di didattica della matematica con una successione fitta di studi sull'importanza decisiva della semiotica nell'attività di apprendimento dei concetti della matematica. Erano i primi anni '90 (Duval, 1993).

Da tempo ci conoscevamo ma ci si frequentava solo in modo episodico; ci confrontammo durante uno studio ICMI a Catania nel 1995 sull'apprendimento della geometria; e ancora nel luglio del 1996 a Siviglia, durante l'ICME 8, quando mi venne affiancato proprio Raymond come collaboratore nel Topic Group da me diretto (come Chief Organizer) sull'apprendimento dell'infinito: *Infinite processes throughout the curriculum*. Ma oramai il suo mondo di ricerca era diventata la semiotica (Duval, 1995).

Il suo modo di affrontarla, pur facendo riferimento alle basi concettuali di Frege, De Saussure e Peirce, è decisamente rivoluzionario. Il senso che dà alla sua ricerca è strettamente legato all'apprendimento della matematica, tanto che ha coniato il motto diventato simbolo mondiale: *Non c'è noetica senza semiotica*, che è stato sulla bocca di tutti noi, una delle frasi più citate nel nostro mondo di ricerca.

Un altro contributo universale è stata l'idea di "paradosso cognitivo dell'apprendimento", nel quale si afferma che è paradossale il fatto che l'allievo apprenda – costruisca un oggetto matematico O avendo a disposizione solo rappresentazioni semiotiche di O e non la conoscenza di O, dato che non c'è altro modo, da parte del docente, di mostrare O. Si tratta di una posizione che ha alle spalle migliaia di anni di antecedenti, per esempio questo fantastico di Agostino di Tagaste:

> Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum? [Quando infatti mi è dato un segno, se mi trova nella non conoscenza della cosa di cui è segno, non mi può insegnare nulla, ma se la so già, allora che cosa imparo mediante il segno?]. (Agostino, *De Magistro*, 10, 115).

In un recente lavoro (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015), abbiamo messo in evidenza proprio come questa idea geniale di Raymond sia il risultato in itinere di posizioni filosofico-semiotiche che hanno inizio nell'antica Grecia: glielo comunicai anche di persona durante un convegno internazionale a Santa Marta e ne fu colpito (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015).

Durante le mie visite a Lille, dove abita, Raymond è sempre stato prodigo di insegnamenti a tutto campo; tanto che ora so per certo che le sue opere principali non rispecchiano, a mio avviso, che una minima parte del suo sapere reale. Lui sa dosare benissimo i saperi da distribuire, occasione per occasione: seminario di ricerca, confronto con dottorandi, corso per master, incontri con insegnanti, colloqui con studenti, …; chi lo conosce e lo ascolta in questi casi, si rende conto del fatto che la trasposizione didattica vale in ogni livello di studio ed è davvero un tema appassionante generale.

Credo di aver capito a fondo il dissidio fra Vygotskij e Piaget solo grazie alle sue spiegazioni, un giorno, a Lille, in casa sua, tentando maldestramente di preparare un pranzo, pur avendo studiato su questo argomento tutto quel che è stato scritto in decenni; e la posizione reale di De Saussure, nonostante avessi letto le sue opere direttamente in francese.

Lui cita spesso, e lo fa anche in questo libro alle pagine 43 e 44, l'artista statunitense Joseph Kosuth, famoso per essere uno dei primi artisti della cosiddetta "linea analitica" (D'Amore, 2015a); fra le tante opere, Kosuth è famoso per "Una e tre sedie", realizzata a partire dal 1966 in tante versioni e che ora si trova nei maggiori musei del mondo. In tale opera egli espone una sedia reale di materiali vari, una sua foto e una definizione di sedia tratta dal vocabolario. Si tratta di un lavoro di grande importanza nel mondo della storia dell'arte, interessante sul piano della semiotica. Mi piace comunicare a Raymond da queste righe che anche l'artista francese Bernar Venet, nello stesso 1966, aveva esposto un'opera dal titolo "Tubo", che ha alla base la stessa identica idea: l'oggetto (un tubo) e una sua rappresentazione assonometrica (D'Amore, 2015b). Come a dire: questo tipo di operazione era già nell'aria. Ma io credo che, per uno studio dell'importanza della semiotica nell'arte contemporanea bisogna partire dal belga René Magritte (D'Amore, 2010).

In questo libro, semplice e breve, ma assai profondo, dotto e concreto, Raymond esplora il suo mondo semiotico da gigante, da par suo.

Si propone di studiare le relazioni fra rappresentazione e conoscenza, grazie a una rivoluzione all'interno della semiotica già da tempo in atto (Duval, 2006), sulla base di questi temi: (1) il ruolo della rappresentazione nella conoscenza di un oggetto, in generale, e di un oggetto matematico, in particolare (Duval, 2009a); (2) la differenza, anche da un punto di vista cognitivo, fra segno e rappresentazione (Duval, 2009b).

La semiotica è presentata come un nuovo schema di analisi della conoscenza. Per arrivare a ciò deve discutere in profondità i tre modelli fondamentali dell'analisi dei segni, ciascuno con i suoi contributi e con i suoi limiti; quello di De Saussure (analisi strutturale dei sistemi semiotici); quello di Peirce (classificazione dei diversi tipi di rappresentazione), e quello di Frege (il processo semiotico che produce nuove conoscenze). (Si vedano i tre articoli di Raymond Duval in: Duval & Sáenz-Ludlow, 2016, e i miei commenti specifici nello stesso testo).

Un problema centrale riguarda la relazione fra le attività matematiche e le trasformazioni semiotiche. Nel processo di accesso agli oggetti matematici si evidenziano due situazioni epistemologiche, irriducibili l'una all'altra. E si usa un test (detto di opposizione) con un oggetto materiale: come riconoscere uno stesso oggetto in diverse rappresentazioni, come si crea la corrispondenza tra oggetti o tra rappresentazioni.

Le trasformazioni di rappresentazioni semiotiche sono poste da Raymond al cuore del lavoro matematico. E qui l'autore si abbandona a esempi convincenti, di grande forza epistemologica e didattica, già pubblicati altrove, sulle figure geometriche e sui numeri naturali (Duval, 2012; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). Da queste riflessioni, conclude che è necessaria un'analisi cognitiva dell'attività matematica e del funzionamento del pensiero in matematica.

Passiamo poi ai registri di rappresentazione semiotica e all'analisi del funzionamento cognitivo del pensiero in matematica; importante è la differenza fra codici e registri, l'analisi dei tipi di operazioni discorsive e delle funzioni cognitive delle lingue naturali, le relazioni fra pensiero e linguaggio, e che cosa caratterizza un registro di rappresentazione semiotica.

Si passa di seguito all'analisi di uno dei capisaldi della ricerca in didattica della matematica, la visualizzazione. Ma come vediamo una figura? Come vediamo le trasformazioni di una figura? Come funziona tutto ciò nella didattica della geometria? Gli esempi qui forniti sono portentosi e preziosi.

Un capitolo intero è dedicato ai registri. Qui rientrano considerazioni sulle unità di senso in matematica relative al contenuto di una rappresentazione; come variano le attività matematiche in funzione dei registri messi in atto; variazioni funzionali delle modalità fenomenologiche di produzione in relazione ai registri; come compiere analisi significative e utili delle attività di aula.

La potenza di questa opera, come di altre dello stesso autore, è che la relazione fra studi, all'apparenza solo teorici, e la vita di classe è totale. Egli ha molto frequentato le aule; ho letto parecchi suoi resoconti di attività svolte con studenti. Gli apparenti voli teorici che a volte sembrano dimenticare il concreto dell'aula per arrivare a vette altissime un po' astruse, sono invece sempre occasioni per riconquistare spazi vissuti dove l'interesse è concreto, vicino all'allievo e all'insegnante.

E senza limiti di età, perché alcune considerazioni possono perfino essere adatte a bambini dei primi gradi di scolarità, mentre altre sembrano non avere riferimenti a età. Anzi, mi sono sempre sorpreso a pensare alla formidabile analisi epistemologica del suo lavoro, che tratta l'aula come un ambiente sperimentale di costruzione degli oggetti matematici.

Il suo modo assai personale di vedere, nel senso proprio specifico di "vedere", le figure è un contributo notevole alla ricerca epistemologica in matematica; me lo confermano altri suoi studi (Duval, 2016).

E il suo sconfinamento nel mondo dell'arte non può che impressionarmi, visto che fornisce allo studioso due campi semiotici, l'artistico e il matematico, ritenuti non interscambiabili nel senso comune.

Lo studio attento di questo breve libro non potrà che portare beneficio a chi compie ricerca nel campo della didattica della matematica, ma anche a chi lavora quotidianamente nel mondo della scuola e vuole eliminare il divario fra l'oggetto matematico che si pretende di far costruire cognitivamente e quello che, nella realtà, lo studente costruisce, come fosse un problema sì epistemologico, ma anche di didattica concreta.

Lo stesso Raymond suggerisce quattro modalità diverse di lettura di questo libro: una lettura lineare, la più banale e diffusa, dall'inizio alla fine; una lettura trasversale sinottica per temi ricorrenti; una lettura pratica, cercando i temi e i suggerimenti didattici espliciti; una lettura come se si trattasse di un cartone animato o di un libro per bambini, guardando solo le figure del libro e seguendole nel loro iter e nella loro evoluzione. Io ho personalmente seguito la prima modalità e, avendo la fortuna di conoscere questi temi, ho molto apprezzato la struttura e la scelta di essi. E poi ho provato a seguire le figure, come farebbe un bambino; devo ammettere che una certa qual dose di coraggio ci vuole, ma è indubbiamente una modalità interessante di lettura.

Al lettore, ora, la scelta.

## Riferimenti bibliografici

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari (Italia): Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 2–13. Disponibile da www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática: Una mirada epistemológica y empírica.* [Autori: Guy Brousseau, John Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Diaz Godino, Salvador Llinares]. Atti del convegno internazionale omonimo, settembre 2015. Chia (Colombia): Ediciones Universidad de La Sabana.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5* (1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna (Svizzera): Peter Lang.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 165–196.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 45–81. Disponibile da http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (2009a). «Objet»: Un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble (Francia): PUG.

Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia: Revista de educação em ciências e matemáticas, 6*(11–12), 126 –143.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa, 7*(2), 305–330. doi:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. In M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore.* Proceedings of International Conference, October 8, 2016 (pp. 213–220). Department of Mathematics, University of Bologna. Preface by Bruno D'Amore. Bologna (Italia): Pitagora. ISBN: 88-371-1927-5. Disponibile gratuitamente su: http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org, http://www.incontriconlamatematica.net.

Duval, R., & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. [Premessa di Bruno D'Amore. Commenti agli articoli di Bruno D'Amore e di Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

## Prefacio (en español)

Después de haber dedicado su tiempo al estudio de las problemáticas del aprendizaje del concepto de infinito en matemática y a la distinción entre demostración y argumentación, Raymond Duval sorprendió al mundo de la investigación en didáctica de la matemática con una densa sucesión de estudios sobre la decisiva importancia de la semiótica en la actividad de aprendizaje de los conceptos matemáticos. Eran los primeros años de la década de los noventa (Duval, 1993).

Nos conocíamos desde hacía bastante tiempo, pero nuestros encuentros eran esporádicos; nos encontramos durante un estudio ICMI en Catania en 1995 sobre el aprendizaje de la geometría; y meses después en julio de 1996 en Sevilla, durante el congreso del ICME 8, cuando se me asignó precisamente a Raymond Duval como colaborador en el Topic Group dirigido por mi (como Chief Organizer) sobre el aprendizaje del infinito: *Infinite processes throughout the curriculum*.

Pero ya para ese entonces su campo de investigación había girado hacia la semiótica (Duval, 1995).

Su forma de afrontarla, aún haciendo referencia a las bases conceptuales de Frege, De Saussure y de Peirce, es decididamente revolucionario; el sentido que da a su investigación está estrictamente relacionado con el aprendizaje de la matemática; tanto que ha acuñado la sentencia hoy mundialmente reconocida: *No existe noética sin semiótica*, que ha sido pronunciada por todos nosotros, una de las frases mayormente citadas en nuestro mundo de investigación.

Otra contribución universal fue la idea de “paradoja cognitiva del aprendizaje”, en la cual se afirma que es paradójico el hecho que el alumno aprenda – construya un objeto matemático O teniendo a disposición sólo representaciones semióticas de O y no el conocimiento de O, dado que el docente no tiene otra forma de mostrar O. Se trata de una posición que tiene a la espalda miles de años de antecedentes, por ejemplo, este fantástico de Agustín de Tagaste:

> Cum enim mihi signum datur, si nescientem me invenit cuius rei signum sit, docere me nihil potest: si vero scientem, quid disco per signum? [Cuando, de hecho, me han dado un signo, si me encuentro en que no tengo conocimiento de la cosa de la cual es signo, no puede enseñarme nada; pero, si ya lo conozco, entonces ¿qué estoy aprendiendo mediante el signo?] (Agustín, *De Magistro*, 10, 115).

En un trabajo reciente (D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi, 2015), evidenciamos precisamente cómo esta genial idea de Raymond es el resultado de un itinerario de posiciones filosófico-semióticas que tuvieron inicio en la antigua Grecia; este hecho se lo comuniqué personalmente durante un congreso internacional en Santa Marta y Raymond manifestó gran interés por este análisis.

Durante mis visitas a Lille, donde vive, Raymond fue siempre generoso de enseñanzas sobre cualquier tema que abordábamos; tanto que ahora puedo decir con certeza que sus principales obras no reflejan, en mi opinión, sino una mínima parte de su saber real. Él sabe dosificar muy bien los saberes que desea comunicar, en cada ocasión: seminarios de investigación, confrontaciones con doctorandos, cursos de maestría, encuentros con docentes, coloquios con estudiantes, …; quien lo conoce y lo escucha en estos casos, se da cuenta del hecho que la transposición didáctica es válida en todo nivel escolar y es en verdad un apasionante tema.

Creo haber entendido definitivamente las discrepancias entre Vygotsky y Piaget sólo gracias a sus explicaciones, un día, en Lille, en su casa, intentando sin mucho éxito de preparar un almuerzo, aunque haya estudiado sobre este antagonismo todo lo que se ha escrito en decenios, así como sobre la posición real de De Saussure, a pesar de haber leído sus obras directamente en francés.

Duval cita con frecuencia, y lo hace también en este libro en las páginas 43 y 44, al artista estadounidense Joseph Kosuth, famoso por ser uno de los primeros artistas de la llamada "línea analítica" (D'Amore, 2015a); entre sus múltiples obras, Kosuth es famoso por "Una y tres sillas", realizadas a partir de 1966 en varias versiones, y que actualmente se encuentra en los mejores museos del mundo. En dicha obra el artista expone una silla real hecha con diversos materiales, una fotografía de dicha silla y una definición de la palabra "silla" tomada de un diccionario.

Se trata de un trabajo de gran importancia en el mundo de la historia del arte, que también es interesante en el plano de la semiótica. Me da gusto comunicar a Raymond en estas líneas que también el artista francés Bernar Venet, en el mismo año 1996, expuso una obra con el título "Tubo", que tiene como base la misma idea: el objeto (un tubo) y una representación axonometría (D'Amore, 2015b).

Como se suele decir, este tipo de operaciones estaban ya en el aire. Pero pienso que, para un estudio de la importancia de la semiótica en el arte, es necesario partir del belga René Magritte (D'Amore, 2010).

En este libro, simple y breve, pero sin lugar a dudas profundo, docto y concreto, Raymond explora su mundo semiótico como un gigante, como sólo él puede hacer.

Nos propone estudiar las relaciones entre la representación y el conocimiento gracias a una revolución en el interior de la semiótica, estudio iniciado hace tiempo (Duval, 2006) y basado en los temas: 1) el papel de la representación en el conocimiento de un objeto, en general, y de un objeto matemático, en particular (Duval, 2009a); 2) la diferencia que se presenta, incluso desde el punto de vista cognitivo, entre signo y representación (Duval, 2009b).

La semiótica se presenta como un nuevo esquema de análisis del conocimiento. Para llegar a esto, debe discutir en profundidad los tres modelos fundamentales del análisis de los signos, cada uno con sus contribuciones y con sus límites; el de De Saussure (análisis estructural de los sistemas semióticos); el de Peirce (clasificación de los diversos tipos de representación); el de Frege (el proceso semiótico que produce nuevos conocimientos). (Véanse los tres artículos de Raymond Duval en Duval & Sáenz-Ludlow, 2016, y mis comentarios específicos en el mismo texto).

Un problema central tiene que ver con la relación entre actividades matemáticas y las transformaciones semióticas. En el proceso de acceso a los objetos matemáticos se evidencian dos situaciones epistemológicas, irreducibles la una a la otra. Y se usa un test (llamado de oposición) con un objeto material: cómo reconocer un mismo objeto en diversas representaciones, cómo se crea la correspondencia entre objetos o entre representaciones.

Las transformaciones entre representaciones semióticas son puestas por Raymond en el centro del trabajo matemático; y aquí el autor se deja llevar por ejemplos convincentes, de gran fuerza epistemológica y didáctica, ya publicados en otros textos, sobre las figuras geométricas y sobre los números naturales (Duval, 2012; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). De estas reflexiones, concluye que es necesario un análisis cognitivo de la actividad matemática y del funcionamiento del pensamiento en matemática.

Se aborda también el estudio de los registros de representación semiótica y al análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento en matemática; importante es la diferencia entre códigos y registros; el análisis de los tipos de operaciones discursivas y funciones cognitivas de las lenguas naturales; relaciones entre pensamiento y lenguaje; la caracterización de un registro de representación semiótica.

Se pasa a continuación a un análisis de uno de los baluartes de la investigación en didáctica de la matemática, la visualización. Pero ¿Cómo vemos una figura? ¿Cómo vemos las transformaciones de una figura? ¿Cómo funciona todo esto en la didáctica de la geometría? Los ejemplos que aquí se presentan son portentosos y preciosos.

Un capítulo completo está dedicado a los registros. Aquí se encuentran consideraciones sobre la unidad de sentido en matemática relativas al contenido de una representación; cómo varían las actividades matemáticas en función de los registros que se ponen en juego; variaciones funcionales de las modalidades fenomenológicas de producción en relación a los registros; cómo lograr análisis significativos y útiles de las actividades de aula.

La potencia de esta obra, como de otras de Raymond Duval, está en que la relación entre estudios, en apariencia sólo teóricos, y la vida de la clase es total; él ha frecuentado muchas aulas, he leído sus narraciones de las actividades desarrolladas con estudiantes; los aparentes vuelos teóricos que en ocasiones parecen olvidar la actividad concreta en el aula para alcanzar los picos más altos y un poco abstrusos, son por el contrario siempre ocasiones para reconquistar espacios vividos donde los intereses son concretos, cercanos al estudiante y al docente.

Y sin límites de edad, porque algunas consideraciones pueden incluso ser apropiadas para niños de los primeros grados de escolaridad, mientras que otras parecen no tener ninguna referencia a la edad; es más, siempre me sorprende pensar en el formidable análisis epistemológico de su trabajo, que trata el aula como un ambiente experimental de construcción de los objetos matemáticos.

Su forma muy personal de ver, en el sentido específico de "ver", las figuras es una contribución notable a la investigación epistemológica en matemática; encuentro confirmación en otros de sus estudios (Duval, 2016).

El paso dado hacia el mundo del arte sólo puede impresionarme, dado que proporciona al estudioso dos campos semióticos, el artístico y el matemático, considerados para nada intercambiables según el sentido común.

El estudio atento de este breve libro portará, sin duda alguna, beneficios a quien realiza investigaciones en el campo de la didáctica de la matemática, como también a quien trabaja cotidianamente en el mundo de la escuela y desea eliminar la brecha entre el objeto matemático que se pretende ayudar a construir cognitivamente y aquel que, en la realidad, el estudiante construye, como si fuera un problema efectivamente epistemológico, pero también de didáctica concreta.

El mismo Raymond Duval sugiere cuatro modalidades diferentes de lectura de este libro: una lectura lineal, la más banal y difusa, de inicio a fin; una lectura transversal sinóptica por temas recurrentes; una lectura práctica, buscando los temas y las sugerencias didácticas explícitas; una lectura como si se tratara de un dibujo animado o de un libro para niños, mirando sólo las figuras y siguiéndolas en su itinerario y en su evolución. Yo personalmente seguí la primera modalidad y, teniendo la fortuna de conocer en detalle estos temas, aprecié la estructura y la elección de estos. Y después intenté seguir las figuras, como haría un niño; debo admitir que una cierta dosis de coraje es necesaria, pero es indudablemente una modalidad interesante de lectura.

Al lector, ahora, corresponde la elección.

## Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. En V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts. Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari (Italia): Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 2–13. Recuperado de www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica.* [Autores: Guy Brousseau, John

Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Díaz Godino, Salvador Llinares]. Actas del congreso internacional homónimo, septiembre 2015. Chía (Colombia): Ediciones Universidad de La Sabana.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna (Suiza): Peter Lang.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentations et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 139–163.

Duval, R. (1998b). Signe et objet (II): Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 6*(1), 165–196.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 45–81. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Duval, R. (2009a). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble (Francia): PUG.

Duval, R. (2009b). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia Revista de educação em ciências e matemáticas, 6*(11–12), 126–143.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis educativa, 7*(2), 305–330. doi:10.5212/PraxEduc.v.7i2.0001

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie: proximités et divergences. En M. Iori (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2016 (pp. 213–220). Department of Mathematics, University of Bologna. Preface by Bruno D'Amore. Bologna (Italia): Pitagora. ISBN: 88-371-1927-5. Descarcable gratuitamente de: http://www.dm.unibo.it/rsddm, http://www.incontriconlamatematica.org, http://www.incontriconlamatematica.net.

Duval, R., & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los artículos de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá (Colombia): Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

*La matematica e la sua didattica*, Anno 25, n. 2, 2017
ISSN 1120-9968